10.11

ノートのタイトル 2016/05/24

(10.36) $q(m) \propto p(m)\exp\{\mathcal{L}_m\}$ ただし $\mathcal{L}_m = \sum_z q(z|m)\ln\left\{\frac{p(z,X|m)}{q(z|m)}\right\}$

(10.35) $\mathcal{L} = \sum_m\sum_z q(z|m)q(m)\ln\left\{\frac{p(z,X,m)}{q(z|m)q(m)}\right\}$

$q(m)$について$\mathcal{L}$を最大化する。
制約条件は

$$\sum_m q(m)=1$$

ラグランジュ関数は

$$L = \mathcal{L} + \lambda\left(\sum_m q(m)-1\right)$$

$$= \sum_m\sum_z q(z|m)q(m)\ln\left\{\frac{p(z,X,m)}{q(z|m)q(m)}\right\} + \lambda\left(\sum_m q(m)-1\right)$$

$$= \sum_m\left[\sum_z q(z|m)q(m)\ln\left\{\frac{p(z,X,m)}{q(z|m)q(m)}\right\} + \lambda q(m)\right] - \lambda$$

$$= \sum_m q(m)\left[\sum_z q(z|m)\ln\left\{\frac{p(z,X,m)}{q(z|m)q(m)}\right\} + \lambda\right] - \lambda$$

(注) $\frac{\partial L}{\partial q(m)} = \frac{\partial}{\partial q(m)}\sum_m q(m)$ …が計算できないので $\frac{\partial L}{\partial q(m)}=0$ の停留条件は使えない

$q(m)$はmの関数なので $\frac{\partial}{\partial q(m)}$と$\sum_m$は交換できない

Lは$q(m)$の汎関数になっている

$$G = q(m)\left[\sum_z q(z|m)\ln\left\{\frac{p(z,X,m)}{q(z|m)q(m)}\right\} + \lambda\right]$$

とおくと、Lの停留条件は(D.8)より

$$\frac{\partial G}{\partial q(m)} = \sum_z q(z|m)\ln\left\{\frac{p(z,X,m)}{q(z|m)q(m)}\right\} + \lambda - \sum_z q(z|m) = 0$$

$\frac{\partial}{\partial q(m)}\ln\left\{\frac{p(z,X,m)}{q(z|m)q(m)}\right\} = -\frac{1}{q(m)}$

となる。これを$q(m)$について解く

$$\sum_z q(z|m)\ln\left\{\frac{p(z,X,m)}{q(z|m)q(m)}\right\} + \lambda - 1 = 0$$

$\sum_z q(z|m)=1$

$$\sum_z q(z|m)\ln\frac{p(z,X,m)}{q(z|m)} - \sum_z q(z|m)\ln q(m) + \lambda - 1 = 0$$

$\sum_z q(z|m)\ln q(m) = \ln q(m)\underbrace{\sum_z q(z|m)}_{=1} = \ln q(m)$

$$\ln q(m) = \lambda - 1 + \sum_z q(z|m)\ln\frac{p(z,X,m)}{q(z|m)}$$

$$\therefore\ q(m) = \exp(\lambda-1)\exp\left\{\sum_z q(z|m)\ln\frac{p(z,X,m)}{q(z|m)}\right\}$$

$$= \exp(\lambda-1)\exp\left\{\sum_z q(z|m)\ln\frac{p(z,X|m)p(m)}{q(z|m)}\right\}$$

$\sum_z q(z|m)\ln p(m) = \ln p(m)\sum_z q(z|m) = \ln p(m)$

$$= \exp(\lambda-1)\exp\left\{\sum_z q(z|m)\ln\frac{p(z,X|m)}{q(z|m)}\right\}\exp\left\{\sum_z q(z|m)\ln p(m)\right\}$$

$$= \exp(\lambda-1)\,p(m)\exp\left\{\sum_z q(z|m)\ln\frac{p(z,X|m)}{q(z|m)}\right\}$$

となり

$$q(m) \propto p(m)\exp\left\{\sum_z q(z|m)\ln\frac{p(z,X|m)}{q(z|m)}\right\} \quad \cdots (10.36)$$

を得る。