

"混合要素の入れ替えについての対称性"とは

予測分布において $k=i$ と $k=j$ の要素を入れ替えての値が一致すること

例) ベイズ"混合"モデルの予測分布は、演習 10.20 (4) N が大きいとき

$$p(\hat{z}|X) = \sum_{k=1}^K \pi_k N(\hat{z} | \mu_k, \Lambda_k^{-1}), \quad \pi_k = \frac{N_k}{N}, \quad \mu_k = \bar{x}_k, \quad \Lambda_k^{-1} = S_k$$

とある。 $k=i$ と $k=j$ の要素(=kの添字と積数)を入れ替えただけでは

$$p'(\hat{z}|X) = \sum_{k=1}^K \pi'_k N(\hat{z} | \mu'_k, \Lambda_k'^{-1})$$

ここで

$$\pi'_i = \pi_j, \quad \pi'_j = \pi_i, \quad \mu'_i = \mu_j, \quad \mu'_j = \mu_i, \quad \Lambda_i'^{-1} = \Lambda_j^{-1}, \quad \Lambda_j'^{-1} = \Lambda_i^{-1}$$

i, j 以外の要素については $\pi'_k = \pi_k, \mu'_k = \mu_k, \Lambda_k'^{-1} = \Lambda_k^{-1}$

となるので

$$p(\hat{z}|X) = p'(\hat{z}|X)$$

となる。したがって"ベイズ"混合"モデルの予測分布は要素の入れ替えについての対称性がある。

K 個の混合要素を持つ混合モデルの予測分布について

パラメータの設定を1つ考える。

$$k=1 \quad (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = (a_1, b_1, c_1)$$

$$k=2 \quad (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = (a_2, b_2, c_2)$$

⋮

$$k=K \quad (\alpha_K, \beta_K, \gamma_K) = (a_K, b_K, c_K)$$

どの要素の何番目に
所属しているか場合を考へる。

K 要素の入れ替えについての対称性があること、予測分布の値が同じになる
任意の2つの要素を入れ替えた設定は同値である。

$\{1, 2, \dots, K\}$ の置換 (i, j, \dots, m) を考へる。置換は互換の積で表わされる。

つまり (i, j, \dots, m) は2つの要素の入れ替えをくり返すことで得ることから

つまり置換 (i, j, \dots, m) による設定は元の設定と同値である。

置換の総数は $K!$ であり、又互換の積で表わされる置換はすべてこの置換に分解できるので、同値な設定の総数は $K!$ である。