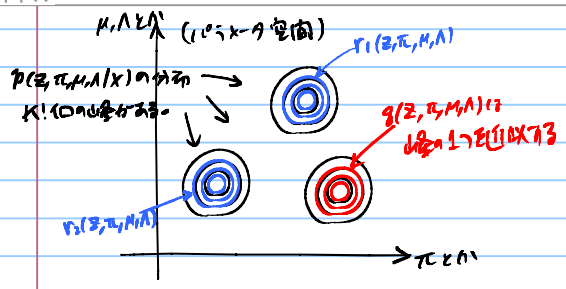
10.22

ノートのタイトル 2016/08/02



真の分布 $p(Z,\pi,\mu,\Lambda|X)$ に対する下界は(10.3)より

$$\mathcal{L}(p(Z,\pi,\mu,\Lambda|X)) = \int p(Z,\pi,\mu,\Lambda|X) \ln \frac{p(Z,\pi,\mu,\Lambda,X)}{p(Z,\pi,\mu,\Lambda|X)} dZ d\pi d\mu d\Lambda \quad \cdots ①$$

ここで $p(Z,\pi,\mu,\Lambda|X)$ の各峰を近似する $r_i(Z,\pi,\mu,\Lambda)$, $i=1\sim K!$ を考える

各峰は十分離れていると仮定してるので、

$$p(Z,\pi,\mu,\Lambda|X) \simeq \sum_{i=1}^{K!} \rho\, r_i(Z,\pi,\mu,\Lambda)$$ ← 混合係数は同じと仮定している。

と書ける。ここで

$$1 = \int p(Z\pi\mu\Lambda|X) dZ d\pi d\mu d\Lambda = \sum_{i=1}^{K!} \rho \int r_i\, dZ d\pi d\mu d\Lambda = K!\rho$$

であって

$$\rho = \frac{1}{K!}$$

よって

$$p(Z,\pi,\mu,\Lambda|X) \simeq \sum_{i=1}^{K!} \frac{1}{K!} r_i(Z,\pi,\mu,\Lambda)$$

これを①に入れて

$$\mathcal{L}(p(Z,\pi,\mu,\Lambda|X)) = \int \sum_{i=1}^{K!} \frac{1}{K!} r_i(Z,\pi,\mu,\Lambda) \ln \frac{p(Z,\pi,\mu,\Lambda,X)}{\sum_{i=1}^{K!}\frac{1}{K!} r_i(Z,\pi,\mu,\Lambda)} dZ d\pi d\mu d\Lambda$$

$$= \frac{1}{K!}\underbrace{\int r_1(Z,\pi,\mu,\Lambda) \ln \frac{p(Z,\pi,\mu,\Lambda,X)}{\sum_{i=1}^{K!}\frac{1}{K!} r_i(Z,\pi,\mu,\Lambda)} dZ d\pi d\mu d\Lambda}_{r_1\text{が0でない領域において}r_2,r_3\cdots\text{は0なので}} + \frac{1}{K!}\int r_2(Z,\pi,\mu,\Lambda) \ln \frac{p(Z,\pi,\mu,\Lambda,X)}{\sum_{i=1}^{K!}\frac{1}{K!} r_i(Z,\pi,\mu,\Lambda)} dZ d\pi d\mu d\Lambda + \cdots$$

r_2と同様

$$= \frac{1}{K!}\int r_1(Z,\pi,\mu,\Lambda) \ln \frac{p(Z,\pi,\mu,\Lambda,X)}{\frac{1}{K!} r_1(Z,\pi,\mu,\Lambda)} dZ d\pi d\mu d\Lambda + \frac{1}{K!}\int r_2(Z,\pi,\mu,\Lambda) \ln \frac{p(Z,\pi,\mu,\Lambda,X)}{\frac{1}{K!} r_2(Z,\pi,\mu,\Lambda)} dZ d\pi d\mu d\Lambda + \cdots$$

$$= \frac{1}{K!}\sum_{i=1}^{K!}\int r_i(Z,\pi,\mu,\Lambda) \ln \frac{p(Z,\pi,\mu,\Lambda,X)}{\frac{1}{K!} r_i(Z,\pi,\mu,\Lambda)} dZ d\pi d\mu d\Lambda$$

$$= \frac{1}{K!}\sum_{i=1}^{K!}\int r_i(Z,\pi,\mu,\Lambda)\left\{\ln \frac{p(Z,\pi,\mu,\Lambda,X)}{r_i(Z,\pi,\mu,\Lambda)} + \ln K!\right\} dZ d\pi d\mu d\Lambda$$

$$= \frac{1}{K!}\left[\sum_{i=1}^{K!}\int r_i(Z,\pi,\mu,\Lambda) \ln \frac{p(Z,\pi,\mu,\Lambda,X)}{r_i(Z,\pi,\mu,\Lambda)} dZ d\pi d\mu d\Lambda + \ln K! \underbrace{\sum_{i=1}^{K!}\overbrace{\int r_i(Z\pi\mu\Lambda) dZ d\pi d\mu d\Lambda}^{=1}}_{=K!}\right]$$

$$= \frac{1}{K!}\sum_{i=1}^{K!}\int r_i(Z,\pi,\mu,\Lambda) \ln \frac{p(Z,\pi,\mu,\Lambda,X)}{r_i(Z,\pi,\mu,\Lambda)} dZ d\pi d\mu d\Lambda + \ln K!$$

$$= \frac{1}{K!} K! \int q(Z,\pi,\mu,\Lambda) \ln \frac{p(Z,\pi,\mu,\Lambda,X)}{q(Z,\pi,\mu,\Lambda)} dZ d\pi d\mu d\Lambda + \ln K!$$

$$= \mathcal{L}(q) + \ln K!$$

を得る。

各峰r_iは同値なので各峰の積分は一致する。
また変分近似qはr_iのうちのどれかを近似しているので

r_iとr_jが同値というのは
r_iのk要素交換を何回かおこなうと
r_jに一致するということ。
このときr_iとr_jの積分は一致する。

例えば
$r_1(Z,\theta_1,\theta_2,\theta_3) = r_2(Z,\theta_3,\theta_2,\theta_1)$
のとき

$\tau_1=\theta_3, \tau_2=\theta_2, \tau_3=\theta_1$とする
また$\theta_1,\theta_2,\theta_3$の積分は同じなので

$$\int r_1(Z,\theta_1,\theta_2,\theta_3) d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 = \int r_2(Z,\theta_3,\theta_2,\theta_1) d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3$$
$$= \int r_2(Z,\tau_1,\tau_2,\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3$$