10.31

$$f(x) = -\ln\left(e^{x/2} + e^{-x/2}\right)$$

これを$x$で微分する

$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{2}e^{x/2} - \frac{1}{2}e^{-x/2}}{e^{x/2} + e^{-x/2}} = -\frac{1}{2}\frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{e^{x/2} + e^{-x/2}} = -\frac{1}{2}\frac{e^{x} - 1}{e^{x} + 1}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}\frac{e^{x}(e^{x}+1) - (e^{x}-1)e^{x}}{(e^{x}+1)^2} = -\frac{e^{x}}{(e^{x}+1)^2} < 0$$

なので $f(x)$ は 上に凸 である

次に $x^2 = z$ として

$$f(x) = -\ln\left(e^{x/2} + e^{-x/2}\right) = -\ln\left(e^{\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}} + e^{-\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}}\right) = g(z)$$

これを $z$ で微分する

$$g'(z) = -\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}}}{e^{\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}} + e^{-\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}}}$$

$$= -\frac{1}{4}z^{-\frac{1}{2}}\frac{e^{\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}} - e^{-\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}}}{e^{\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}} + e^{-\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}}}$$

$$= -\frac{1}{4}z^{-\frac{1}{2}}\frac{e^{z^{\frac{1}{2}}} - 1}{e^{z^{\frac{1}{2}}} + 1}$$

$$g(z)'' = -\frac{1}{4}\left\{-\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}\frac{e^{z^{\frac{1}{2}}} - 1}{e^{z^{\frac{1}{2}}} + 1} + z^{-\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}e^{z^{\frac{1}{2}}}(e^{z^{\frac{1}{2}}}+1) - \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}e^{z^{\frac{1}{2}}}(e^{z^{\frac{1}{2}}}-1)}{(e^{z^{\frac{1}{2}}} + 1)^2}\right\}$$

$$= -\frac{1}{4}\left\{-\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}\frac{e^{z^{\frac{1}{2}}} - 1}{e^{z^{\frac{1}{2}}} + 1} + z^{-1}\frac{e^{z^{\frac{1}{2}}}}{(e^{z^{\frac{1}{2}}} + 1)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{8}\frac{z^{-\frac{3}{2}}}{(e^{z^{\frac{1}{2}}} + 1)^2}\left\{(e^{z^{\frac{1}{2}}} - 1)(e^{z^{\frac{1}{2}}} + 1) - 2z^{\frac{1}{2}}e^{z^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

$$= \frac{1}{8}\frac{z^{-\frac{3}{2}}}{(e^{z^{\frac{1}{2}}} + 1)^2}\left(e^{2z^{\frac{1}{2}}} - 1 - 2z^{\frac{1}{2}}e^{z^{\frac{1}{2}}}\right) > 0 \quad (z>0のとき)$$

$i(z) = e^{z^{\frac{1}{2}}} - 1 - z^{\frac{1}{2}}$ について

$i'(z) = \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}e^{z^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}(e^{z^{\frac{1}{2}}} - 1) > 0$ ← $z>0$で $e^{z^{\frac{1}{2}}} - 1 > 0$ なので

なので $i(z)$ は $z>0$ で単調増加

また $i(z) \longrightarrow 0$ $(z \to +0)$ なので

$i(z) > 0$

$h(z) = e^{2z^{\frac{1}{2}}} - 1 - 2z^{\frac{1}{2}}e^{z^{\frac{1}{2}}}$ について

$h'(z) = 2\cdot\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}e^{2z^{\frac{1}{2}}} - 2\cdot\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}e^{z^{\frac{1}{2}}} - 2z^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}e^{z^{\frac{1}{2}}}$

$= z^{-\frac{1}{2}}e^{2z^{\frac{1}{2}}} - z^{-\frac{1}{2}}e^{z^{\frac{1}{2}}} - e^{z^{\frac{1}{2}}}$

$= e^{z^{\frac{1}{2}}}z^{-\frac{1}{2}}(e^{z^{\frac{1}{2}}} - 1 - z^{\frac{1}{2}}) > 0$

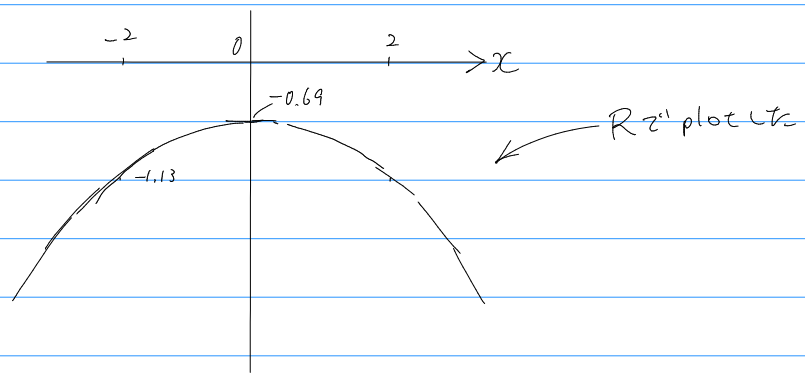
なので $h(z)$ は $z>0$ で単調増加

また $h(z) \longrightarrow 0$ $(z \to +0)$ なので

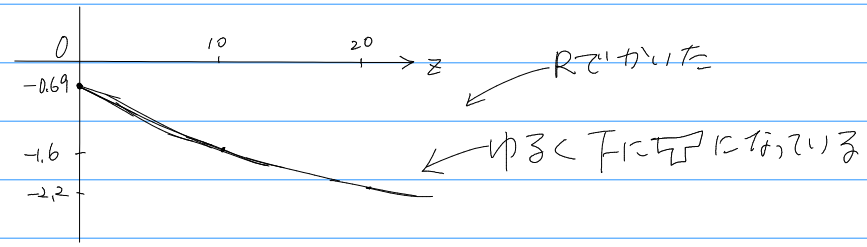
$z>0$ で $h(z) > 0$ である

よって $z>0$ で $g(z)$ は 凸 関数である。

$f(x)$のグラフ




$g(z)$のグラフ

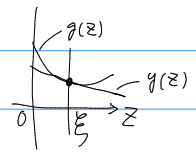



$g(z)$の$\tau$の周りでの一次のテイラー展開は

$$y(z) = -\ln\left(e^{\frac{1}{2}\tau^{\frac{1}{2}}} + e^{-\frac{1}{2}\tau^{\frac{1}{2}}}\right) + \left(-\frac{1}{4}\tau^{-\frac{1}{2}}\frac{e^{\tau^{\frac{1}{2}}}-1}{e^{\tau^{\frac{1}{2}}}+1}\right)(z-\tau), \quad \tau \geq 0,\ z \geq 0$$

$g(z)$は下に凸なので

$g(z) \geq y(z)$, $z \geq 0$, 等号は$z=\tau$のとき




よって

$$-\ln\left(e^{\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}} + e^{-\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}}\right) \geq -\ln\left(e^{\frac{1}{2}\tau^{\frac{1}{2}}} + e^{-\frac{1}{2}\tau^{\frac{1}{2}}}\right) + \left(-\frac{1}{4}\tau^{-\frac{1}{2}}\frac{e^{\tau^{\frac{1}{2}}}-1}{e^{\tau^{\frac{1}{2}}}+1}\right)(z-\tau)$$

$z = x^2$とすると、$x \geq 0$, $x < 0$どちらの場合でも

$x \geq 0$のとき $x = \sqrt{z}$
$x < 0$のとき $x = -\sqrt{z}$ } どっちでも同じ不等式になる

$$-\ln\left(e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right) \geq -\ln\left(e^{\frac{1}{2}\tau^{\frac{1}{2}}} + e^{-\frac{1}{2}\tau^{\frac{1}{2}}}\right) + \left(-\frac{1}{4}\tau^{-\frac{1}{2}}\frac{e^{\tau^{\frac{1}{2}}}-1}{e^{\tau^{\frac{1}{2}}}+1}\right)(x^2-\tau)$$

となる。

さらに$\tau = \xi^2$とすると、$\xi \geq 0$, $\xi < 0$どちらの場合でも

$\xi = \sqrt{\tau}$
$\xi = -\sqrt{\tau}$ } どっちの場合も同じ式になる

$$-\ln\left(e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right) \geq -\ln\left(e^{\frac{1}{2}\xi} + e^{-\frac{1}{2}\xi}\right) + \left(-\frac{1}{4}\xi^{-1}\frac{e^{\xi}-1}{e^{\xi}+1}\right)(x^2-\xi^2), \quad x \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}$$

となる。

両辺に $\frac{x}{2}$ を足して指数をとると

$$\exp\left\{\frac{x}{2}-\ln\left(e^{\frac{1}{2}x}+e^{-\frac{1}{2}x}\right)\right\} \geq \exp\left\{\frac{x}{2}-\ln\left(e^{\frac{1}{2}\xi}+e^{-\frac{1}{2}\xi}\right)+\left(-\frac{1}{4}\xi^{-1}\frac{e^{\xi}-1}{e^{\xi}+1}\right)(x^2-\xi^2)\right\}$$

これより

$$\sigma(x) \geq \sigma(\xi)\exp\left\{\frac{x-\xi}{2}-\frac{1}{4\xi}\tanh\left(\frac{\xi}{2}\right)(x^2-\xi^2)\right\},\ (x\in\mathbb{R},\ \xi\in\mathbb{R})$$

を得る。等号は $x^2=\xi^2$ のとき。これは(10.144)と同じ式になっている。

(右辺)

$$\exp\left\{\frac{x}{2}-\ln\left(e^{\frac{\xi}{2}}+e^{-\frac{\xi}{2}}\right)+\left(-\frac{1}{4}\xi^{-1}\frac{e^{\xi}-1}{e^{\xi}+1}\right)(x^2-\xi^2)\right\}$$

$$\frac{e^{\xi}-1}{e^{\xi}+1}=\frac{e^{\frac{\xi}{2}}-e^{-\frac{\xi}{2}}}{e^{\frac{\xi}{2}}+e^{-\frac{\xi}{2}}}=\tanh\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

$$=\exp\left\{\frac{x}{2}-\frac{\xi}{2}+\frac{\xi}{2}-\ln\left(e^{\frac{\xi}{2}}+e^{-\frac{\xi}{2}}\right)-\frac{1}{4\xi}\tanh\left(\frac{\xi}{2}\right)(x^2-\xi^2)\right\}$$

$$=\sigma(\xi)\exp\left\{\frac{x-\xi}{2}-\frac{1}{4\xi}\tanh\left(\frac{\xi}{2}\right)(x^2-\xi^2)\right\} \leftarrow \exp\left\{\frac{\xi}{2}-\ln\left(e^{\frac{\xi}{2}}+e^{-\frac{\xi}{2}}\right)\right\}\overset{(10.138)}{=}\sigma(\xi)$$

(左辺)

$$\exp\left\{\frac{x}{2}-\ln\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)\right\}\overset{(10.138)}{=}\sigma(x)$$