10.34

(10.164)

$$\mathcal{L}(\xi)=\frac{1}{2}\ln\frac{|S_N|}{|S_0|}+\frac{1}{2}m_N^T S_N^{-1} m_N-\frac{1}{2}m_0^T S_0^{-1} m_0+\sum_{n=1}^{N}\left\{\ln\sigma(\xi_n)-\frac{1}{2}\xi_n+\lambda(\xi_n)\xi_n^2\right\}$$

ここで (10.157) より

$$m_N' = S_N'\left(S_0^{-1}m_0+\sum_{n=1}^{N}\left(t_n-\frac{1}{2}\right)\phi_n\right)$$

← (C.21)より $S_N' = -S_N(S_N^{-1})' S_N$

$$= -S_N(S_N^{-1})' S_N\left(S_0^{-1}m_0+\sum_{n=1}^{N}\left(t_n-\frac{1}{2}\right)\phi_n\right)$$

$$= -S_N(S_N^{-1})' m_N$$

よって

$$(m_N^T S_N^{-1} m_N)' = (m_N^T)' S_N^{-1} m_N + m_N^T (S_N^{-1})' m_N + m_N^T S_N^{-1} m_N'$$

$$= \{-S_N(S_N^{-1})' m_N\}^T S_N^{-1} m_N + m_N^T (S_N^{-1})' m_N + m_N^T S_N^{-1}\{-S_N(S_N^{-1})' m_N\}$$

S_N対称なので $S_N^T = S_N$, $(S_N^{-1})^T = S_N^{-1}$, $(S_N^{-1})^T = S_N^{-1}$

$$= -m_N^T (S_N^{-1})' S_N S_N^{-1} m_N + m_N^T (S_N^{-1})' m_N - m_N^T S_N^{-1} S_N (S_N^{-1})' m_N$$

$$= -m_N^T (S_N^{-1})' m_N$$

また

(C.22)

$$(\ln|S_N|)' = \mathrm{Tr}(S_N^{-1} S_N') = \mathrm{Tr}[S_N^{-1}\{-S_N(S_N^{-1})' S_N\}] = \mathrm{Tr}\{-(S_N^{-1})' S_N\}$$

よって

(4.88)

$(\ln\sigma)' = \frac{\sigma(1-\sigma)}{\sigma} = 1-\sigma$

$$\mathcal{L}(\xi)' = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{-(S_N^{-1})' S_N\} + \frac{1}{2}\{-m_N^T (S_N^{-1})' m_N\} + 1-\sigma - \frac{1}{2} + \lambda'\xi_n^2 + 2\lambda\xi_n$$

トレースの循環　　トレースマジック

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{-S_N(S_N^{-1})'\} + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{-m_N m_N^T (S_N^{-1})'\} + \lambda'\xi_n^2$$

$$1-\sigma-\frac{1}{2}+\lambda'\xi_n^2+2\lambda\xi_n$$

(10.150)

$$= (1-\sigma)-\frac{1}{2}+\lambda'\xi_n^2+2\frac{1}{2\xi_n}\left[\sigma-\frac{1}{2}\right]\xi_n$$

$$= \lambda'\xi_n^2$$

$$= \mathrm{Tr}\left\{-\frac{1}{2}(S_N+m_N m_N^T)(S_N^{-1})'\right\} + \lambda'\xi_n^2$$

$$= \mathrm{Tr}\left\{-\frac{1}{2}(S_N+m_N m_N^T)2\lambda'\phi_n\phi_n^T\right\} + \lambda'\xi_n^2$$

(10.158)より

$(S_N^{-1})' = 2\lambda'(\xi_n)\phi_n\phi_n^T$

$$= \mathrm{Tr}\{-(S_N+m_N m_N^T)\lambda'\phi_n\phi_n^T\} + \lambda'\xi_n^2$$

トレースの循環

$$= \mathrm{Tr}\left\{-\lambda' \phi_n^T (S_N + m_N m_N^T) \phi_n\right\} + \lambda' \xi_n^2$$

スカラーなのでTrなくても同じ

$$= -\lambda' \phi_n^T (S_N + m_N m_N^T) \phi_n + \lambda' \xi_n^2$$

なので $\mathcal{L}(\xi') = 0$ より

$$-\lambda' \phi_n^T (S_N + m_N m_N^T) \phi_n + \lambda' \xi_n^2 = 0$$

本文の通り $\xi_n > 0$ を考えれば良く、このとき $\lambda' \neq 0$ なので

$$-\phi_n^T (S_N + m_N m_N^T) \phi_n + \xi_n^2 = 0$$

よって

$$\xi_n^2 = \phi_n^T (S_N + m_N m_N^T) \phi_n$$

を得る。