10.7

ノートのタイトル　2016/05/21

(q_μについて)

$$(10.25)\quad \ln q_\mu^*(\mu) = -\frac{E_\tau(\tau)}{2}\left\{\lambda_0(\mu-\mu_0)^2 + \sum_{n=1}^{N}(x_n-\mu)^2\right\} + c$$

μについて平方完成する

$$\lambda_0(\mu-\mu_0)^2 + \sum_{n=1}^{N}(x_n-\mu)^2$$

$$= \lambda_0\mu^2 - 2\lambda_0\mu_0\mu + \lambda_0\mu_0^2 + \sum_{n=1}^{N}(x_n^2 - 2x_n\mu + \mu^2)$$

$$= (\lambda_0+N)\mu^2 - 2\left(\lambda_0\mu_0 + \sum_{n=1}^{N}x_n\right)\mu + c$$ ← μを含まない項をまとめてcにする

$$= (\lambda_0+N)\left\{\mu^2 - 2\frac{\lambda_0\mu_0+\sum x_n}{\lambda_0+N}\mu + \left(\frac{\lambda_0\mu_0+\sum x_n}{\lambda_0+N}\right)^2\right\} \underbrace{- \frac{(\lambda_0\mu_0+\sum x_n)^2}{\lambda_0+N} + c}_{\mu\text{に関らないのでまとめてcにする}}$$

$$= (\lambda_0+N)\left(\mu - \frac{\lambda_0\mu_0+\sum x_n}{\lambda_0+N}\right)^2 + c$$

これより

$$\ln q_\mu^*(\mu) = -\frac{E_\tau(\tau)(\lambda_0+N)}{2}\left(\mu - \frac{\lambda_0\mu_0+\sum x_n}{\lambda_0+N}\right)^2 + c$$

となる。

これより

$$\mu_N = \frac{\lambda_0\mu_0 + N\bar{x}}{\lambda_0+N}, \quad \bar{x} = \frac{\sum_{n=1}^{N}x_n}{N} \quad \cdots (10.26)$$

$$\lambda_N = E_\tau[\tau](\lambda_0+N) \quad \cdots (10.27)$$

を得る

(次にq_τについて)

$$(10.28)\quad \ln q_\tau^*(\tau) = (a_0-1)\ln\tau - b_0\tau + \frac{N+1}{2}\ln\tau - \frac{\tau}{2}E_\mu\left[\sum_{n=1}^{N}(x_n-\mu)^2 + \lambda_0(\mu-\mu_0)^2\right] + c$$

$\ln\tau$とτについてまとめる

$$\ln q_\tau^*(\tau) = (\ln\tau)\left(a_0 - 1 + \frac{N+1}{2}\right) - \tau\left(b_0 + \frac{1}{2}E_\mu\left[\sum_{n=1}^{N}(x_n-\mu)^2 + \lambda_0(\mu-\mu_0)^2\right]\right) + c$$

これより

$$a_N = a_0 + \frac{N+1}{2} \quad \cdots (10.29)$$ ← $(2.146)\ \mathrm{Gam}(\tau|a,b) = \frac{1}{\Gamma(a)}b^a\tau^{a-1}\exp(-b\tau)$

$$b_N = b_0 + \frac{1}{2}E_\mu\left[\sum_{n=1}^{N}(x_n-\mu)^2 + \lambda_0(\mu-\mu_0)^2\right] \quad \cdots (10.30)$$

を得る。