11.3

$\left(\int \frac{1}{1+x^2}dx\right.$ について$\left.\right)$

$$y=\tan^{-1}x$$

とすると

$$x=\tan y$$

微分すると

$$(\tan^{-1}x)'=\frac{dy}{dx}=\underset{\uparrow\text{逆関数の微分}}{\frac{1}{\frac{dx}{dy}}}=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\frac{1}{\frac{\cos^2 y+\sin^2 y}{\cos^2 y}}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

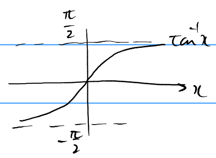
よって

$$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x+C$$

である。

(11.8) より

$$p(y)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}$$



積分して

$$z=h(y)=\int_{-\infty}^{y}p(\hat{y})d\hat{y}=\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\hat{y}^2}d\hat{y}=\left[\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\hat{y}\right]_{-\infty}^{y}$$

$$=\frac{1}{\pi}\tan^{-1}y-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\pi}\tan^{-1}y+\frac{1}{2}$$

これを y について解いて

$$\pi\left(z-\frac{1}{2}\right)=\tan^{-1}y$$

$$\therefore\ y=\tan\left\{\pi\left(z-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

を得る。