11.5

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\mu} + L\mathbf{z}$$

これより

$$\mathbf{z} = L^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}^{-1} & L_{12}^{-1} \\ L_{21}^{-1} & L_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - \mu_1 \\ y_2 - \mu_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial z_2}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}^{-1} & L_{12}^{-1} \\ L_{21}^{-1} & L_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

よって

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} = L^{-1}$$

Σは正定値対称とするとコレスキー分解できて
$\Sigma = LL^T$, Lは下三角で対角成分は正となる。
よって $|\Sigma| = |LL^T| = |L||L^T|$ ←(C.12)
三角行列の行列式は対角成分の積であり、
LとL^Tの対角成分は等しいので $|L| = |L^T|$である
またLの対角成分は正なので $|L| > 0$である。
またΣは正定値なので$|\Sigma| > 0$である。
よって $|\Sigma| = |L||L^T| = |L|^2$
$\therefore |\Sigma|^{\frac{1}{2}} = |L|$
となる。

(11.9)より$\mathbf{y}$の確率密度分布は、Σを正定値と仮定して

$$p(\mathbf{y}) = p(\mathbf{z}) \left| \det\left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}}\right) \right|$$

$$= p(\mathbf{z}) \left| |L^{-1}| \right| = p(\mathbf{z}) \left| \frac{1}{|L|} \right| \quad \text{(C.13)}$$

$$= p(\mathbf{z}) \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}$$

となる。($|\Sigma| = 0$のときは、特異変数を除外してΣを正定値にする)

ここで

$z_1, z_2 \cdots$ 独立としているので　$p(z_i) = N(z_i|0,1)$としているので

$$p(\mathbf{z}) = p(z_1)p(z_2)\cdots = N(z_1|0,1)N(z_2|0,1)\cdots = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + \cdots)\right\}$$

なので

$$p(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + \cdots)\right\} \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}$$

$$(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu}) \quad \leftarrow \Sigma = LL^T,\ \mathbf{y} = \boldsymbol{\mu} + L\mathbf{z}$$

$$= (L\mathbf{z})^T (LL^T)^{-1} (L\mathbf{z}) \quad \leftarrow \text{(C.3)}\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$= \mathbf{z}^T L^T (L^T)^{-1} L^{-1} L \mathbf{z}$$

$$= \mathbf{z}^T \mathbf{z} = z_1^2 + z_2^2 + \cdots$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})\right\} \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}$$

$$= N(\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$$

となる。

$\mathbf{y}$の確率密度分布は平均$\boldsymbol{\mu}$, 共分散Σのガウス分布となる。