11.5

$$y = \mu + Lz$$

これより

$$z = L^{-1}(y - \mu)$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}^{-1} & L_{12}^{-1} \\ L_{21}^{-1} & L_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - \mu_1 \\ y_2 - \mu_2 \end{pmatrix}$$

よって

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (L^{-1})^T \quad \text{(分母レイアウト)}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial z_1}{\partial y_2} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}^{-1} & L_{21}^{-1} \\ L_{12}^{-1} & L_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

(なお Σ が正定値対称行列ならば コレスキー分解できるので $\Sigma = LL^T$ の仮定は余分である)

問題分の仮定より

$\Sigma = LL^T$, Lは下三角である。

よって $|\Sigma| = |LL^T| = |L||L^T|$ ←(C.12)

三角行列の行列式は対角成分の積であり、LとL^Tの対角成分は等しいので $|L| = |L^T|$である

よって $|\Sigma| = |L||L^T| = |L|^2$

$\therefore |\Sigma|^{\frac{1}{2}} = |L|$

となる。

また問題の仮定より Σ は正定値なので $|\Sigma| > 0$である。よって $|L| > 0$である。

(11.9)より y の確率密度分布は、

$$p(y) = p(z)\left|\det\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right|$$

←(11.9)の右辺は ヤコビアンの絶対値

$$= p(z)\left|\,|L^{-1}|\,\right| = p(z)\left|\frac{1}{|L|}\right|$$

←(C.13)

$|(L^{-1})^T| = |L^{-1}|$

$$= p(z)\frac{1}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}$$

となる。

ここで問題の仮定より

$$p(z) = N(z|0, I) = \frac{1}{|2\pi|^{\frac{D}{2}}}\frac{1}{|I|^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}z^T I^{-1} z\right) = \frac{1}{|2\pi|^{\frac{D}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}z^T z\right)$$

$$= \frac{1}{|2\pi|^{\frac{D}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_D^2)\right\} = N(z_1|0,1)\cdots N(z_D|0,1)$$

なので

$$p(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(z_1^2 + \cdots + z_D^2)\right\}\frac{1}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(y-\mu)^T\Sigma^{-1}(y-\mu)\right\}\frac{1}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}$$

$$= N(y|\mu, \Sigma)$$

$$(y-\mu)^T\Sigma^{-1}(y-\mu)$$
$$= (Lz)^T(LL^T)^{-1}(Lz)$$
$$= z^T L^T (L^T)^{-1} L^{-1} L z$$
$$= z^T z = z_1^2 + z_2^2 + \cdots$$

$\Sigma = LL^T$

$y = \mu + Lz$

(C.3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

となる。

yの確率密度分布は平均μ, 共分散Σのガウス分布となる。

これより $\mathbf{y} = \mathcal{N}(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ からサンプリングする方法は、

① $\boldsymbol{\Sigma}$ をコレスキー分解する。$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$

② $p(\mathbf{z}) = \mathcal{N}(z_1 \mid 0, 1) \cdots \mathcal{N}(z_D \mid 0, 1)$ からサンプリングする $\mathbf{z} = (z_1, \cdots, z_D)$

③ $\mathbf{z}$ のサンプルを用いて $\mathbf{y}$ のサンプルを $\mathbf{y} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{L}\mathbf{z}$ で求める。

④ このようにして求めた $\mathbf{y}$ のサンプルは $\mathcal{N}(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ に従っている。

となる。