11.5

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\mu} + L\mathbf{z}$$

これより

$$\mathbf{z} = L^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}^{-1} & L_{12}^{-1} \\ L_{21}^{-1} & L_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - \mu_1 \\ y_2 - \mu_2 \end{pmatrix}$$

よって

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} = L^{-1}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial z_2}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}^{-1} & L_{12}^{-1} \\ L_{21}^{-1} & L_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

(11.9) より $\mathbf{y}$ の確率密度分布は, Σ を正定値と仮定して

$$p(\mathbf{y}) = p(\mathbf{z}) \left| \det\left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}}\right) \right|$$

$$= p(\mathbf{z}) \left| |L^{-1}| \right| = p(\mathbf{z}) \left| \frac{1}{|L|} \right| \quad \text{(C.13)}$$

$$= p(\mathbf{z}) \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}$$

(なお Σ が正定値対称ならば コレスキー分解できるので $\Sigma = LL^T$ の仮定は余分である)

問題分の仮定より

$\Sigma = LL^T$, L は下三角である。

よって $|\Sigma| = |LL^T| = |L||L^T|$ (C.12)

三角行列の行列式は対角成分の積であり, L と L^T の対角成分は等しいので $|L| = |L^T|$ である

よって $|\Sigma| = |L||L^T| = |L|^2$

$\therefore |\Sigma|^{\frac{1}{2}} = |L|$

となる。

また問題の仮定より Σ は正定値なので $|\Sigma| > 0$ である。よって $|L| > 0$ である。

となる。

ここで問題の仮定より

$$p(\mathbf{z}) = \mathcal{N}(\mathbf{z}|\mathbf{0}, \mathbf{I}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{|\mathbf{I}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{z}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{z}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{z}^T \mathbf{z}\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_D^2)\right\}$$

なので

$$p(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + \cdots)\right\} \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}$$

$$(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})$$

$\Sigma = LL^T$

$\mathbf{y} = \boldsymbol{\mu} + L\mathbf{z}$

$$= (L\mathbf{z})^T (LL^T)^{-1} (L\mathbf{z})$$

(C.3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$$= \mathbf{z}^T L^T (L^T)^{-1} L^{-1} L \mathbf{z}$$

$$= \mathbf{z}^T \mathbf{z} = z_1^2 + z_2^2 + \cdots$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})\right\} \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \mathcal{N}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$$

となる。

$\mathbf{y}$ の確率密度分布は平均 $\boldsymbol{\mu}$, 共分散 Σ のガウス分布となる。