12.11

(12.48), (12.41) より

$$\mathbb{E}_{p(z|x)}[z] = (W_{ML}^T W_{ML})^{-1} W_{ML}^T (x - \bar{x})$$

ここで (12.45) で, $R = I$, $\sigma^2 \to 0$ とすると

$$W_{ML} = U_M (L_M - \sigma^2 I)^{\frac{1}{2}} R$$

$$= U_M L_M^{\frac{1}{2}}$$

これ使うと

L_Mは対称なので転置しても同じ

$$\mathbb{E}_{p(z|x)}[z] = (L_M^{\frac{1}{2}} \underbrace{U_M^T U_M}_{=I} L_M^{\frac{1}{2}})^{-1} L_M^{\frac{1}{2}} U_M^T (x - \bar{x})$$

$$= L_M^{-\frac{1}{2}} U_M^T (x - \bar{x})$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_M}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_M^T \end{pmatrix} (x - \bar{x})$$

これは x を $-\bar{x}$ 移動したものを主成分空間に直交射影したものを
さらに主成分の各方向に $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ を掛けてスケーリングしたものになっている。
(単純に x の主成分空間への直交射影ではない)

またこれの各要素は x_n を (12.24) で白色化した y_n の第1〜第M成分に等しいので
$\mathbb{E}_{p(z_n|x_n)}[z_n]$ は y_n の主成分空間への直交射影と等しいと言える。

なお, 12.1.1 節の主成分分析で決まるのは主成分の方向だけである。
データ全体を平行移動しても主成分の方向は変わらない。
またデータ全体を主成分方向にスケーリングしても主成分の方向は変わらない。
なので, 主成分空間への射影 $\mathbb{E}_{p(z|x)}[z]$ と, x の主成分空間への直交射影は
どちらも同じ主成分方向を示すという意味で同じものである。