12.12

(12.45) で $\mathbb{R}=\mathbb{I}$ とすると

$$\mathbb{W}_{ML}=\mathbb{U}_M(\mathbb{L}_M-\sigma^2\mathbb{I})^{\frac{1}{2}}$$

これと (12.48) (12.41) より

$(\mathbb{L}_M-\sigma^2\mathbb{I})$ は対角なので転置しても同じ

$$E_{p(z|x)}[z]=\{(\mathbb{L}_M-\sigma^2\mathbb{I})^{\frac{1}{2}}\underbrace{\mathbb{U}_M^T\mathbb{U}_M}_{=\mathbb{I}}(\mathbb{L}_M-\sigma^2\mathbb{I})^{\frac{1}{2}}+\sigma^2\mathbb{I}\}^{-1}(\mathbb{L}_M-\sigma^2\mathbb{I})^{\frac{1}{2}}\mathbb{U}_M^T(x-\bar{x})$$

$$=\mathbb{L}_M^{-1}(\mathbb{L}_M-\sigma^2\mathbb{I})^{\frac{1}{2}}\mathbb{U}_M^T(x-\bar{x})$$

$$=\mathbb{L}_M^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{L}_M-\sigma^2\mathbb{I})^{\frac{1}{2}}\mathbb{L}_M^{-\frac{1}{2}}\mathbb{U}_M^T(x-\bar{x})$$

$$=\{\mathbb{L}_M^{-1}(\mathbb{L}_M-\sigma^2\mathbb{I})\}^{\frac{1}{2}}\mathbb{L}_M^{-\frac{1}{2}}\mathbb{U}_M^T(x-\bar{x})$$

$$=(\mathbb{I}-\sigma^2\mathbb{L}_M^{-1})^{\frac{1}{2}}\mathbb{L}_M^{-\frac{1}{2}}\mathbb{U}_M^T(x-\bar{x})$$

$$=\begin{pmatrix}\sqrt{1-\frac{\sigma^2}{\lambda_1}} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{1-\frac{\sigma^2}{\lambda_M}}\end{pmatrix}\mathbb{L}_M^{-\frac{1}{2}}\mathbb{U}_M^T(x-\bar{x})$$

ここで $\sqrt{1-\frac{\sigma^2}{\lambda_i}}<1$ $(\sigma^2>0)$ なので $\sigma^2=0$ の $E_{p(z|x)}[z]=\mathbb{L}_M^{-\frac{1}{2}}\mathbb{U}_M^T(x-\bar{x})$ と比べると
スケーリングによって原点側に移動したものになっている。