12.19

$\tilde{z} = Rz$ ただし $RR^T = I$ とする。

$\tilde{z}$ における確率密度は (12.31) より

$$p(\tilde{z}) = N(\tilde{z}|0, I)$$

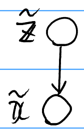
で与えられる。右辺を展開すると

$$p(\tilde{z}) = N(Rz|0,I) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(Rz)^T Rz\right\} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} z^T z\right\} = p(z) \cdots ①$$

となる。

$\tilde{z}$ に依存する観測変数を $\tilde{x}$ とすると

$\tilde{z}$ が与えられたときの $\tilde{x}$ の条件付確率密度は、(12.64) より



$$p(\tilde{x}|\tilde{z}) = N(\tilde{x}|W\tilde{z} + \mu, \Psi)$$

で与えられる。右辺を展開し、$\tilde{W} = WR$ とすると

$$\begin{aligned} p(\tilde{x}|\tilde{z}) &= N(\tilde{x}|W\tilde{z} + \mu, \Psi) \\ &= N(\tilde{x}|WRz + \mu, \Psi) \\ &= N(\tilde{x}|\tilde{W}z + \mu, \Psi) \\ &= p(\tilde{x}|z) \quad \cdots ② \end{aligned}$$

$N(\tilde{x}|\tilde{W}z + \mu, \Psi)$ は z が与えられたときの $\tilde{x}$ の条件付確率密度になっているので

となる。①を (2.113)、②を (2.114) に対応させると、(2.115) より

$$p(\tilde{x}) = N(\tilde{x}|\mu, \Psi + \tilde{W}\tilde{W}^T)$$

を得る。ここで

$$\tilde{W}\tilde{W}^T = WRR^T W^T = WW^T$$

なので、

$$p(\tilde{x}) = N(\tilde{x}|\mu, \Psi + WW^T)$$

となる。これは $p(x) = N(x|\mu, \Psi + WW^T)$ と同じ関数形である。

よって z の回転に対して $p(x)$ は不変である。