

12.21

2章の式の変数を (12.64) に合わせて書くと

$$(2.113) \quad p(\mathbf{z}) = N(\mathbf{z} | \mathbf{m}, \Lambda^{-1})$$

$$(2.114) \quad p(x | \mathbf{z}) = N(x | A\mathbf{z} + b, L^{-1})$$

$$(2.116) \quad p(\mathbf{z} | x) = N(\mathbf{z} | \Sigma \{ A^T L(x - b) + \Lambda \mathbf{m} \}, \Sigma)$$

$$(2.117) \quad \Sigma = (\Lambda + A^T L A)^{-1}$$

と対応。これは (12.31)、(12.64) と見比べると

$$(12.31) \quad p(\mathbf{z}) = N(\mathbf{z} | \mathbf{0}, \mathbf{I})$$

$$(12.64) \quad p(x | \mathbf{z}) = N(x | W\mathbf{z} + \bar{x}, \Psi) \leftarrow \mathbf{m} = \bar{x} \text{ と使えば}$$

(2.116)、(2.117) より

$$p(\mathbf{z} | x) = N(\mathbf{z} | G W^T \Psi^{-1} (x - \bar{x}), G) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{ただし } G = (\mathbf{I} + W \Psi^{-1} W)^{-1} \dots (12.68)$$

を得る。①より

$$E_{p(\mathbf{z} | x_n)} [z_n] = G W^T \Psi^{-1} (x_n - \bar{x}) \dots (12.66)$$

を得る。

また ①より

$$\text{cov}[z_n] = \overset{\text{covの公式}}{E_{p(\mathbf{z} | x_n)} [(z_n - E[z_n])(z_n - E[z_n])^T]} = G$$

より

$$G = E_{p(\mathbf{z} | x_n)} [(z_n - E[z_n])(z_n - E[z_n])^T] = \overset{\text{分散の公式}}{E_{p(\mathbf{z} | x_n)} [z_n z_n^T]} - E_{p(\mathbf{z} | x_n)} [z_n] E_{p(\mathbf{z} | x_n)}^T$$

より

$$E_{p(\mathbf{z} | x_n)} [z_n z_n^T] = G + E_{p(\mathbf{z} | x_n)} [z_n] E_{p(\mathbf{z} | x_n)}^T \dots (12.67)$$

を得る。