12.26

(12.79) $\mathbb{K}^2 \mathbf{b}_i = \lambda_i N \mathbb{K} \mathbf{b}_i$ ← (12.80)と区別するため $\mathbf{b}_i$ と書いた

(12.80) $\mathbb{K} \mathbf{a}_i = \lambda_i N \mathbf{a}_i$

(12.80) の解のうち $\lambda_i \neq 0$ のものを $\mathbf{a}_i, \lambda_i$ と書き、
$\lambda_i = 0$ のものを $\mathbf{a}_0, \lambda_0$ と書くことにする。
$\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i$ とすると

$$\mathbb{K}^2 \mathbf{b}_i = \mathbb{K}^2 \mathbf{a}_i = \mathbb{K}(\mathbb{K} \mathbf{a}_i) = \mathbb{K} \lambda_i N \mathbf{a}_i = \lambda_i N \mathbb{K} \mathbf{a}_i$$

なので $\mathbf{a}_i$ は (12.79) の解である。
$\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_0$ とすると

$$\mathbb{K}^2 \mathbf{b}_i = \mathbb{K}^2 \mathbf{a}_0 = \mathbb{K}(\mathbb{K} \mathbf{a}_0) = \mathbb{K}(\lambda_0 N \mathbf{a}_0) = \lambda_0 N \mathbb{K} \mathbf{a}_0$$

なので $\mathbf{a}_0$ は (12.79) の解である。

$$\mathbb{K}^2 \mathbf{a}_0 = 0 = \lambda_i N \overbrace{\mathbb{K} \mathbf{a}_0}^{0}$$

$\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i + l \mathbf{a}_0$ とすると

$$\mathbb{K}^2 \mathbf{b}_i = \mathbb{K}^2(\mathbf{a}_i + l \mathbf{a}_0) = \mathbb{K}^2 \mathbf{a}_i + l \mathbb{K}^2 \mathbf{a}_0 = \lambda_i N \mathbb{K} \mathbf{a}_i + l \lambda_i N \mathbb{K} \mathbf{a}_0 = \lambda_i N \mathbb{K}(\mathbf{a}_i + l \mathbf{a}_0)$$

なので $\mathbf{a}_i + l \mathbf{a}_0$ は (12.79) の解である。

なお $\mathbf{a}_i + l \mathbf{a}_0$ は (12.80) の解ではない。

なぜなら
$$\mathbb{K}(\mathbf{a}_i + l \mathbf{a}_0) = \mathbb{K} \mathbf{a}_i + l \overbrace{\mathbb{K} \mathbf{a}_0}^{=0} = \mathbb{K} \mathbf{a}_i = \lambda_i N \mathbf{a}_i \neq \lambda_i N (\mathbf{a}_i + l \mathbf{a}_0)$$
なので

また、(12.79)の解は $\mathbb{b}_i = k\mathbb{a}_i + \ell \mathbb{a}_0$ の形のものに限る。

もしこれ以外の解があるとすると、

$\mathbb{b}_i = k\mathbb{a}_i + \ell\mathbb{a}_0 + \mathbb{c}_i$, $\mathbb{c}_i \perp \mathbb{a}_i$, $\mathbb{c}_i \perp \mathbb{a}_0$

と書ける。(12.79)に入れて

$\mathbb{K}^2(k\mathbb{a}_i + \ell\mathbb{a}_0 + \mathbb{c}_i) = \lambda_i N \mathbb{K}(k\mathbb{a}_i + \ell\mathbb{a}_0 + \mathbb{c}_i)$

$\therefore k\underbrace{(\mathbb{K}^2\mathbb{a}_i - \lambda_i N\mathbb{K}\mathbb{a}_i)}_{=0} + \ell(\underbrace{\mathbb{K}^2\mathbb{a}_0}_{=0} - \lambda_i N\underbrace{\mathbb{K}\mathbb{a}_0}_{=0}) + (\mathbb{K}^2\mathbb{c}_i - \lambda_i N\mathbb{K}\mathbb{c}_i) = 0$

よって $\mathbb{K}^2\mathbb{c}_i - \lambda_i N\mathbb{K}\mathbb{c}_i = 0 \cdots (1)$

$\therefore \mathbb{K}(\mathbb{K}\mathbb{c}_i - \lambda_i N\mathbb{c}_i) = 0$

となる。$\mathbb{c}_i \neq \mathbb{a}_i$ なので $\mathbb{K}\mathbb{c}_i - \lambda_i N\mathbb{c}_i \neq 0$

なので $\mathbb{K}\mathbb{c}_i - \lambda_i N\mathbb{c}_i = m\mathbb{a}_0$ となる。

両辺を $\mathbb{a}_0$ と掛け合わせると

$(\mathbb{K}\mathbb{c}_i - \lambda_i N\mathbb{c}_i)^T\mathbb{a}_0 = m\mathbb{a}_0^T\mathbb{a}_0$

$\therefore \mathbb{c}_i^T\mathbb{K}^T\mathbb{a}_0 - \lambda_i N\underbrace{\mathbb{c}_i^T\mathbb{a}_0}_{=0\ (\because \mathbb{c}_i \perp \mathbb{a}_0)} = m\mathbb{a}_0^2$

よって $(\mathbb{c}_i^T\mathbb{K}^T - m\mathbb{a}_0^T)\mathbb{a}_0 = 0$

$\therefore \mathbb{K}\mathbb{c}_i - m\mathbb{a}_0 = 0$

$\therefore \mathbb{K}\mathbb{c}_i = m\mathbb{a}_0 \cdots (2)$

両辺に $\mathbb{K}$ を掛けて　$\mathbb{K}\mathbb{a}_0 = 0$

$\mathbb{K}^2\mathbb{c}_i = m\mathbb{K}\mathbb{a}_0 = 0$

これを元の(1)に入れると

$0 - \lambda_i N\mathbb{K}\mathbb{c}_i = 0$

$\therefore \mathbb{K}\mathbb{c}_i = 0$

これを(2)に入れると

$0 = m\mathbb{a}_0$

$\therefore \mathbb{a}_0 = 0$

となる。$\mathbb{a}_0$ は固有ベクトルであり

$\mathbb{a}_0 \neq 0$ ということと矛盾する。

なので、$\mathbb{b}_i = k\mathbb{a}_i + \ell\mathbb{a}_0$ 以外の解はない

(12.76) で

$$v_i = \sum_{n=1}^{N} (a_{in} + a_{0n}) \phi(x_n)$$

とすると、データ点 x_m の v_i 上への射影は

$$y_i(x_m) = \phi(x_m)^T v_i = \phi(x_m)^T \sum_{n=1}^{N} (a_{in} + a_{0n}) \phi(x_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} a_{in} \phi(x_m)^T \phi(x_n) + \sum_{n=1}^{N} a_{0n} \phi(x_m)^T \phi(x_n)$$

$k(1\,1) = \phi(x_1)^T \phi(x_1)$

$$= (\mathbb{K} a_i + \underbrace{\mathbb{K} a_0}_{=0})_{m行} \leftarrow \mathbb{K} a_i = \begin{pmatrix} k(1\,1) \cdots k(1\,N) \\ \vdots \\ k(N\,1) \cdots k(N\,N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(1\,1) a_{11} + \cdots + k(1\,N) a_{1N} \\ k(N\,1) a_{11} + \cdots + k(N\,N) a_{1N} \end{pmatrix}$$

$$= (\mathbb{K} a_i)_{m行}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} a_{in} \phi(x_m)^T \phi(x_n)$$

となり $v_i = \sum_{n=1}^{N} a_{in} \phi(x_n)$ への射影 (12.82) と同じになる。