12.27

主成分分析がカーネル主成分分析の特別な場合であると言うためには、

$K(x, x') = x^T x'$ のとき $\underset{\text{主成分分析の射影}}{x_m^T u_i} = \underset{\text{カーネル主成分分析の射影}}{y_i(x_m)}$ であることが言えればよい。

この目標は (12.82) より

$$x_m^T u_i = y_i(x_m) = \sum_{n=1}^{N} a_{in} K(x_m, x_n) = \sum_{n=1}^{N} a_{in} x_m^T x_n = x_m^T \sum_{n=1}^{N} a_{in} x_n$$

となり、$u_i = \sum_{n=1}^{N} a_{in} x_n$ であることが言えればよいことになる。

これは $u_i = \sum_{n=1}^{N} a_{in} x_n$ が $S u_i = \lambda_i u_i$ を満たしていれば言うことができる。

$u_i = \sum_{n=1}^{N} a_{in} x_n$ のとき

$$S u_i \overset{(12.72)}{=} \frac{1}{N}\left(\sum_{n=1}^{N} x_n x_n^T\right)\left(\sum_{n=1}^{N} a_{in} x_n\right) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} x_m \sum_{n=1}^{N} a_{in} x_m^T x_n$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} x_m \lambda_i N a_{im}$$

$$= \lambda_i \sum_{m=1}^{N} a_{im} x_m$$

$$= \lambda_i u_i$$

(12.80) より $\mathbb{K} a_i = \lambda_i N a_i$

これより

$$\begin{pmatrix} x_1^T x_1 & \cdots & x_1^T x_N \\ \vdots & & \\ x_N^T x_1 & \cdots & x_N^T x_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{iN} \end{pmatrix} = \lambda_i N \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{iN} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{N} a_{in} x_1^T x_n \\ \vdots \\ \sum_{n=1}^{N} a_{in} x_N^T x_n \end{pmatrix} = \lambda_i N \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{iN} \end{pmatrix}$$

となり、$u_i = \sum_{n=1}^{N} a_{in} x_n$ は

$S u_i = \lambda_i u_i$ を満たすことが確認できた。