12.29

z_1, z_2は独立

$p(z_1, z_2) = p(z_1)\,p(z_2)$

と仮定する。

このときz_1とz_2の共分散は

$$\mathrm{cov}(z_1, z_2) = \underset{p(z_1,z_2)}{E}[z_1 z_2] - \underset{p(z_1)}{E}[z_1]\,\underset{p(z_2)}{E}[z_2]$$ ← 共分散の公式

$$= \int p(z_1, z_2)\, z_1 z_2\, dz_1 dz_2 - \int p(z_1)\, z_1\, dz_1 \int p(z_2)\, z_2\, dz_2$$

$$= \int p(z_1) z_1\, dz_1 \int p(z_2)\, z_2\, dz_2 - \int p(z_1)\, z_1\, dz_1 \int p(z_2)\, z_2\, dz_2$$

↑ $p(z_1, z_2) = p(z_1)\,p(z_2)$ より

$$= 0$$

相関係数は

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{\mathrm{cov}(z_1, z_2)}{(\mathrm{var}[z_1]\,\mathrm{var}[z_2])^{\frac{1}{2}}} = 0$$ ← 相関係数の定義

となり相関＝0となる。

また、z_1, z_2の共分散行列は

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{var}[z_1] & \mathrm{cov}(z_1, z_2) \\ \mathrm{cov}(z_2, z_1) & \mathrm{var}[z_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{var}[z_1] & 0 \\ 0 & \mathrm{var}[z_2] \end{pmatrix}$$

となり、対角行列になる。

次に $y_2 = y_1^2$ とすると

$$p(y_2|y_1) = \begin{cases} 1 & (y_2 = y_1^2) \\ 0 & (y_2 \neq y_1^2) \end{cases} = \delta(y_2 - y_1^2)$$

$y_1 = 1$ のとき $p(y_2=1|y_1=1) = 1$
$y_1 = 0$ のとき $p(y_2=1|y_1=0) = 0$
となので、$y_2 = 1$ の確率密度は
y_1 の値によって変化するので
$p(y_2|y_1)$ は y_1 に依存していると言える

となり、$p(y_2|y_1)$ は y_1 に依存している。

つまり、y_1 と y_2 は独立ではない。このとき共分散は

$p(y_1)$ は 0 を中心に対称なので

$$\mathrm{cov}(y_1, y_2) = \mathop{E}_{p(y_1,y_2)}[y_1 y_2] - \overbrace{\mathop{E}_{p(y_1)}[y_1]}^{0} \mathop{E}_{p(y_2)}[y_2]$$

← 共分散の公式

$$= \int \delta(y_2 - y_1^2) p(y_1) y_1 y_2 \, dy_1 dy_2$$

← $p(y_1, y_2) = p(y_2|y_1) p(y_1) = \delta(y_2 - y_1^2) p(y_1)$

$$= \int p(y_1) y_1 \int \delta(y_2 - y_1^2) y_2 \, dy_2 \, dy_1$$

$p(y_1)$ は 0 を中心に対称なので $p(y_1)$ は偶関数であり
また y_1^3 は奇関数なので、$p(y_1) y_1^3$ は奇関数である。
なので積分 $\int_{-\infty}^{\infty} p(y_1) y_1^3 dy_1 = 0$ となる。

$$= \int p(y_1) y_1 y_1^2 \, dy_1 = \int p(y_1) y_1^3 \, dy_1 = 0$$

となる。相関係数は

$$\rho(y_1, y_2) = \frac{\mathrm{cov}(y_1, y_2)}{(\mathrm{var}(y_1)\,\mathrm{var}(y_2))^{\frac{1}{2}}} = 0$$

となり、相関 $= 0$ である。

y_1, y_2 は独立ではないのに相関 $= 0$ となっている。