12.7

((2.270)が多変量の場合でも成り立つことの確認)

$$\mathbb{E}_{p(y)}\left[\mathbb{E}_{p(x|y)}[x]\right] = \int p(y)\int p(x|y)\, x\, dx\, dy$$

$$= \int x\, p(x)\, dx = \mathbb{E}_{p(x)}[x] \quad \cdots (2.270)$$

((2.271)が多変量の場合、共分散で成り立つことの確認)

(共分散の定ぎ)

$$\mathrm{cov}[x, y] = \mathbb{E}[(x-\mathbb{E}(x))(y-\mathbb{E}(y))^T]$$

これより

$$\mathrm{cov}[x] = \mathrm{cov}[x, x] = \mathbb{E}[(x-\mathbb{E}(x))(x-\mathbb{E}(x))^T]$$

(共分散の公式)

$$\mathrm{cov}[x, y] = \mathbb{E}[xy^T] - \mathbb{E}[x](\mathbb{E}(y))^T$$

これより

$$\mathrm{cov}[x] = \mathbb{E}[xx^T] - \mathbb{E}[x](\mathbb{E}[x])^T$$

$$\mathbb{E}_{p(y)}\left[\mathrm{cov}_{p(x|y)}[x]\right]$$

$$= \mathbb{E}_{p(y)}\left[\mathbb{E}_{p(x|y)}[xx^T] - \mathbb{E}_{p(x|y)}[x]\left(\mathbb{E}_{p(x|y)}[x]\right)^T\right]$$ ← 共分散の公式より

$$= \mathbb{E}_{p(y)}\left[\mathbb{E}_{p(x|y)}[xx^T]\right] - \mathbb{E}_{p(y)}\left[\mathbb{E}_{p(x|y)}[x]\left(\mathbb{E}_{p(x|y)}[x]\right)^T\right]$$

また

$$\mathrm{cov}_{p(y)}\left[\mathbb{E}_{p(x|y)}[x]\right] = \mathbb{E}_{p(y)}\left[\mathbb{E}_{p(x|y)}[x]\left(\mathbb{E}_{p(x|y)}[x]\right)^T\right] - \mathbb{E}_{p(y)}\left[\mathbb{E}_{p(x|y)}[x]\right]\left(\mathbb{E}_{p(y)}\left[\mathbb{E}_{p(x|y)}[x]\right]\right)^T$$ ← 共分散の公式より

よって

$$\mathbb{E}_{p(y)}\left[\mathrm{cov}_{p(x|y)}[x]\right] + \mathrm{cov}_{p(y)}\left[\mathbb{E}_{p(x|y)}[x]\right]$$

$$= \mathbb{E}_{p(y)}\left[\mathbb{E}_{p(x|y)}[xx^T]\right] - \mathbb{E}_{p(y)}\left[\mathbb{E}_{p(x|y)}[x]\left(\mathbb{E}_{p(x|y)}[x]\right)^T\right] + \mathbb{E}_{p(y)}\left[\mathbb{E}_{p(x|y)}[x]\left(\mathbb{E}_{p(x|y)}[x]\right)^T\right] - \mathbb{E}_{p(y)}\left[\mathbb{E}_{p(x|y)}[x]\right]\left(\mathbb{E}_{p(y)}\left[\mathbb{E}_{p(x|y)}[x]\right]\right)^T$$

$$= \mathbb{E}_{p(y)}\left[\mathbb{E}_{p(x|y)}[xx^T]\right] - \mathbb{E}_{p(y)}\left[\mathbb{E}_{p(x|y)}[x]\right]\left(\mathbb{E}_{p(y)}\left[\mathbb{E}_{p(x|y)}[x]\right]\right)^T$$

$$\begin{cases} \mathbb{E}_{p(y)}\left[\mathbb{E}_{p(x|y)}[xx^T]\right] = \int p(y)\int p(x|y)\, xx^T\, dx\, dy = \mathbb{E}_{p(x)}[xx^T] \\ \mathbb{E}_{p(y)}\left[\mathbb{E}_{p(x|y)}[x]\right] = \int p(y)\int p(x|y)\, x\, dx\, dy = \mathbb{E}_{p(x)}[x] \end{cases}$$

$$= \mathbb{E}_{p(x)}[xx^T] - \mathbb{E}_{p(x)}[x]\left(\mathbb{E}_{p(x)}[x]\right)^T$$

$$= \mathrm{cov}_{p(x)}[x] \quad \cdots (2.271)$$

を得る。

(2.270), (2.271) を $p(\mathbf{z})$ (12.31), $p(\mathbf{x}|\mathbf{z})$ (12.32) にあてはめる。

$$\mathbb{E}_{p(\mathbf{x})}[\mathbf{x}] \overset{(2.270)}{=} \mathbb{E}_{p(\mathbf{z})}\left[\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}|\mathbf{z})}[\mathbf{x}]\right]$$

$p(\mathbf{x}|\mathbf{z}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}|\mathbf{W}\mathbf{z}+\boldsymbol{\mu}+\sigma^2\mathbf{I})$ (12.32) より

$\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}|\mathbf{z})}[\mathbf{x}] = \mathbf{W}\mathbf{z}+\boldsymbol{\mu}$

$$= \mathbb{E}_{p(\mathbf{z})}[\mathbf{W}\mathbf{z}+\boldsymbol{\mu}]$$

$\mathbb{E}[a\mathbf{x}+\mathbf{b}] = a\,\mathbb{E}[\mathbf{x}]+\mathbf{b}$

$$= \mathbf{W}\,\mathbb{E}_{p(\mathbf{z})}[\mathbf{z}]+\boldsymbol{\mu}$$

$p(\mathbf{z}) = \mathcal{N}(\mathbf{z}|\mathbf{0},\mathbf{I})$ (12.31) より

$\mathbb{E}_{p(\mathbf{z})}[\mathbf{z}] = 0$

$$= \boldsymbol{\mu}$$

共分散は

$p(\mathbf{x}|\mathbf{z}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}|\mathbf{W}\mathbf{z}+\boldsymbol{\mu}+\sigma^2\mathbf{I})$ (12.32) より

$\underset{p(\mathbf{x}|\mathbf{z})}{\mathrm{cov}}[\mathbf{x}] = \sigma^2\mathbf{I}$

$\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}|\mathbf{z})}[\mathbf{x}] = \mathbf{W}\mathbf{z}+\boldsymbol{\mu}$

$$\underset{p(\mathbf{x})}{\mathrm{cov}}[\mathbf{x}] \overset{(2.271)}{=} \underset{p(\mathbf{z})}{\mathbb{E}}\left[\underset{p(\mathbf{x}|\mathbf{z})}{\mathrm{cov}}[\mathbf{x}]\right] + \underset{p(\mathbf{z})}{\mathrm{cov}}\left[\underset{p(\mathbf{x}|\mathbf{z})}{\mathbb{E}}[\mathbf{x}]\right]$$

$$= \underset{p(\mathbf{z})}{\mathbb{E}}[\sigma^2\mathbf{I}] + \underset{p(\mathbf{z})}{\mathrm{cov}}[\mathbf{W}\mathbf{z}+\boldsymbol{\mu}]$$

共分散の公式より

$$\underset{p(z)}{\mathrm{cov}}[Wz+\mu] = \underset{p(z)}{\mathbb{E}}[(Wz+\mu)(Wz+\mu)^T] - \underset{p(z)}{\mathbb{E}}[Wz+\mu]\,\underset{p(z)}{\mathbb{E}}[Wz+\mu]^T$$

$$= \mathbb{E}[Wzz^TW^T + Wz\mu^T + \mu z^TW^T + \mu\mu^T] - (W\mathbb{E}[z]+\mu)(W\mathbb{E}[z]+\mu)^T$$

$$= W\mathbb{E}[zz^T]W^T + W\mathbb{E}[z]\mu^T + \mu\,\mathbb{E}[z^T]W + \mu\mu^T - \mu\mu^T$$

$$= WW^T$$

$p(z) = \mathcal{N}(z|0,I)$ より

$\mathbb{E}[z] = 0$ これより $\mathbb{E}[z^T] = \mathbb{E}[z]^T = 0$

また

$\mathrm{cov}[z] = \mathbb{E}[zz^T] - \mathbb{E}[z]\mathbb{E}[z]^T$

$= \mathbb{E}[zz^T]$

$= I$

$$= \sigma^2\mathbf{I} + \mathbf{W}\mathbf{W}^T$$

$p(\mathbf{x})$ がガウス分布と分かっているならば

$$p(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}\,|\,\mathbb{E}[\mathbf{x}],\ \mathrm{cov}[\mathbf{x}])$$

$$= \mathcal{N}(\mathbf{x}\,|\,\boldsymbol{\mu},\ \sigma^2\mathbf{I}+\mathbf{W}\mathbf{W}^T)$$

を得る。