13.18

以下の因子グラフについて

$$f_n(\mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n) = p(u_n)\,p(\mathbf{z}_n \mid u_n, \mathbf{z}_{n-1})\,p(x_n \mid u_n, \mathbf{z}_n)$$

$$h(\mathbf{z}_1) = p(u_1)\,p(\mathbf{z}_1 \mid u_1)\,p(x_1 \mid \mathbf{z}_1, u_1)$$

右向きのメッセージは (8.66), (8.69) より

(8.66)

$$\mu_{f_n \to \mathbf{z}_n}(\mathbf{z}_n) = \sum_{\mathbf{z}_{n-1}} f_n(\mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n)\,\mu_{\mathbf{z}_{n-1} \to f_n}(\mathbf{z}_{n-1})$$

(8.69) より

$$\mu_{\mathbf{z}_{n-1} \to f_n}(\mathbf{z}_{n-1}) = \mu_{f_{n-1} \to \mathbf{z}_{n-1}}(\mathbf{z}_{n-1})$$

$$= \sum_{\mathbf{z}_{n-1}} f_n(\mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n)\,\mu_{f_{n-1} \to \mathbf{z}_{n-1}}(\mathbf{z}_{n-1})$$

となる。ここで

$$\alpha(\mathbf{z}_n) \equiv \mu_{f_n \to \mathbf{z}_n}(\mathbf{z}_n) \quad (n \geq 2)$$

と定義すると

$$\alpha(\mathbf{z}_n) = \sum_{\mathbf{z}_{n-1}} f_n(\mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n)\,\alpha(\mathbf{z}_{n-1}) = \sum_{\mathbf{z}_{n-1}} p(u_n)\,p(\mathbf{z}_n \mid u_n, \mathbf{z}_{n-1})\,p(x_n \mid u_n, \mathbf{z}_n)\,\alpha(\mathbf{z}_{n-1})$$

を得る。また (8.71) より

$$\mu_{h \to \mathbf{z}_1}(\mathbf{z}_1) = h(\mathbf{z}_1)$$

ここで

$$\alpha(\mathbf{z}_1) \equiv \mu_{h \to \mathbf{z}_1}(\mathbf{z}_1)$$

と定義すると

$$\alpha(\mathbf{z}_1) = h(\mathbf{z}_1) = p(u_1)\,p(\mathbf{z}_1 \mid u_1)\,p(x_1 \mid \mathbf{z}_1, u_1)$$

を得る。

左向きのメッセージは、(8.66)、(8.69)より

$$\mu_{f_{n+1}\to z_n}(z_n) = \sum_{z_{n+1}} f_{n+1}(z_n, z_{n+1})\, \mu_{z_{n+1}\to f_{n+1}}(z_{n+1})$$ (8.66)

(8.69)より $\mu_{z_{n+1}\to f_{n+1}}(z_{n+1}) = \mu_{f_{n+2}\to z_{n+1}}(z_{n+1})$

$$= \sum_{z_{n+1}} f_{n+1}(z_n, z_{n+1})\, \mu_{f_{n+2}\to z_{n+1}}(z_{n+1})$$

となる。ここで

$$\beta(z_n) \equiv \mu_{f_{n+1}\to z_n}(z_n) \quad (n < N)$$

と定義すると

$$\beta(z_n) = \sum_{z_{n+1}} f_{n+1}(z_n, z_{n+1})\, \beta(z_{n+1})$$

$$= \sum_{z_{n+1}} p(u_{n+1})\, p(z_{n+1} \mid u_{n+1}, z_n)\, p(x_{n+1} \mid u_{n+1}, z_{n+1})\, \beta(z_{n+1})$$

を得る。また(8.70)より

$$\mu_{z_N\to f_N}(z_N) = 1$$

ここで

$$\beta(z_N) \equiv \mu_{z_N\to f_N}(z_N)$$

と定義すると

$$\beta(z_N) = 1$$

を得る。