13.28

$p(z_n|z_{n-1})$による遷移で$z_n = z_{n-1}$とする。

$\Rightarrow p(z_n|z_{n-1}) = N(z_n|Az_{n-1}, \Gamma)$ の $A = I, \Gamma = O$ とする

さらに $C = I$, $P_0 \to \infty$ とする。

$P_0 \to \infty$ というのは、均一分布の分散共分散行列を表わしてると思われるので、P_0 の対角成分 $\to \infty$ ということと解釈する。

このとき事後分布 $\hat{\alpha}(z_n) = p(z_n|x_1 \cdots x_n)$ の平均 μ_n がどうなるかを見る。

(V_n について)

注 (13.95)は、そのままだと $K_1 \to I (P_0 \to \infty)$ より
$V_1 = (I - K_1) P_0 \to 0 \times \infty \ (P_0 \to \infty)$
となり収束するかどうか良くわからない。

(13.95)より

$$V_1 = (I - K_1 C) \overset{(13.95)}{P_0} = P_0 - K_1 C P_0 = P_0 - P_0 C^T (\underset{(13.97)}{C P_0 C^T + \Sigma})^{-1} C P_0$$

$$= (P_0^{-1} + C^T \Sigma^{-1} C)^{-1} \leftarrow (C.7)$$

$$= (P_0^{-1} + \Sigma^{-1})^{-1} \leftarrow C = I$$

$$\longrightarrow \Sigma \quad (P_0 \to \infty) \cdots (13.95)'$$

$P_0 \to \begin{pmatrix} P_{01} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_{0D} \end{pmatrix} (P_{0i} \to \infty)$ なので

$P_0^{-1} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{P_{01}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{P_{0D}} \end{pmatrix} \to O \ (P_{0i} \to \infty)$

(13.88)より

$$P_{n-1} = V_{n-1} \quad \cdots (13.88)'$$

(13.90)より

$$V_n = (I - K_n C) \overset{(13.90)}{P_{n-1}} = P_{n-1} - K_n C P_{n-1} = P_{n-1} - P_{n-1} C^T (\overset{(13.92)}{C P_{n-1} C^T + \Sigma})^{-1} C P_{n-1}$$

$$= (P_{n-1}^{-1} + C^T \Sigma^{-1} C)^{-1} \leftarrow (C.7)$$

$$= (P_{n-1}^{-1} + \Sigma^{-1})^{-1} \leftarrow C = I$$

$$= (\overset{(13.88)'}{V_{n-1}^{-1}} + \Sigma^{-1})^{-1} \cdots (13.90)'$$

もし $V_{n-1} = \frac{1}{n-1} \Sigma$ とすると (13.90)' より

$$V_n = (V_{n-1}^{-1} + \Sigma^{-1})^{-1} = ((n-1)\Sigma^{-1} + \Sigma^{-1})^{-1} = (n \Sigma^{-1})^{-1} = \frac{1}{n} \Sigma$$

一方、上の(13.95)' より $V_1 = \Sigma$ なので、

$$V_n = \frac{1}{n} \Sigma \quad \cdots ①$$

である。

$$\begin{pmatrix} P_{01} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & & P_{0D} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \cdots & \Sigma_{1D} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{D1} & \cdots & \Sigma_{DD} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} P_{01} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_{0D} \end{pmatrix} \quad (P_{0i} \to \infty)$$

なので

$$\mathbb{P}_0(\mathbb{P}_0 + \Sigma)^{-1} \to \begin{pmatrix} P_{01} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_{0D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{P_{01}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{P_{0D}} \end{pmatrix} = \mathbb{I} \quad (P_{0i} \to \infty)$$

（$\mathbb{K}_n$について）

(13.97)より

$$\mathbb{K}_1 = \mathbb{P}_0(\mathbb{P}_0 + \Sigma)^{-1} \to \mathbb{I} \quad (\mathbb{P}_0 \to \infty) \quad \cdots (13.97)'$$

(13.92)より

$$\mathbb{K}_n = \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{P}_{n-1} + \Sigma)^{-1}$$

(13.88)'

$$= \mathbb{V}_{n-1}(\mathbb{V}_{n-1} + \Sigma)^{-1}$$

①

$$= \frac{1}{n-1}\Sigma\left(\frac{1}{n-1}\Sigma + \Sigma\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{n-1}\Sigma \, \frac{n-1}{n}\Sigma^{-1}$$

$$= \frac{1}{n}\mathbb{I} \quad \cdots ②$$

となる。

（μ_nについて）

(13.94)より

(13.97)'

$$\mu_1 = \mu_0 + \mathbb{K}_1(x_1 - \mu_0) \to x_1 \quad (\mathbb{P}_0 \to \infty) \quad \cdots (13.94)'$$

(13.89)より

$$\mu_n = \mu_{n-1} + \mathbb{K}_n(x_n - \mu_{n-1})$$

②

$$= \mu_{n-1} + \frac{1}{n}\mathbb{I}(x_n - \mu_{n-1})$$

$$= \frac{1}{n}x_n + \frac{n-1}{n}\mu_{n-1} \quad \cdots (13.89)'$$

もし $\mu_{n-1} = \frac{1}{n-1}(x_1 + \cdots + x_{n-1})$ とすると (13.89)' より

$$\mu_n = \frac{1}{n}x_n + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}(x_1 + \cdots + x_{n-1})$$

$$= \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$$

となる。上の (13.94)' より $\mu_1 = x_1$ なので

$$\mu_n = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$$

である。