13.31

(13.103) は

$$\xi(\mathbf{z}_{n-1},\mathbf{z}_n)=\frac{\mathcal{N}(\mathbf{z}_{n-1}|\boldsymbol{\mu}_{n-1},\mathbf{V}_{n-1})\,\mathcal{N}(\mathbf{z}_n|\mathbf{A}\mathbf{z}_{n-1},\boldsymbol{\Gamma})\,\mathcal{N}(\mathbf{x}_n|\mathbf{C}\mathbf{z}_n,\boldsymbol{\Sigma})\,\mathcal{N}(\mathbf{z}_n|\hat{\boldsymbol{\mu}}_n,\hat{\mathbf{V}}_n)}{c_n\hat{\alpha}(\mathbf{z}_n)}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}(\mathbf{z}_{n-1}|\boldsymbol{\mu}_{n-1},\mathbf{V}_{n-1})\,\mathcal{N}(\mathbf{z}_n|\mathbf{A}\mathbf{z}_{n-1},\boldsymbol{\Gamma})\\
&=\mathcal{N}(\mathbf{z}_n|\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_{n-1},\boldsymbol{\Gamma}+\mathbf{A}\mathbf{V}_{n-1}\mathbf{A}^T)\times \quad\leftarrow(2.115)\\
&\qquad\mathcal{N}(\mathbf{z}_{n-1}|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{A}^T\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\mathbf{z}_n+\mathbf{V}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\mu}_{n-1}),\boldsymbol{\Psi}) \quad\leftarrow(2.116)\\
&\qquad \text{ただし } \boldsymbol{\Psi}=(\mathbf{V}_{n-1}^{-1}+\mathbf{A}^T\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\mathbf{A})^{-1} \quad\leftarrow(2.117)\\
&=\mathcal{N}(\mathbf{z}_n|\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_{n-1},\mathbf{P}_{n-1})\times \quad\leftarrow(13.88)\\
&\qquad\mathcal{N}(\mathbf{z}_{n-1}|\mathbf{J}_{n-1}\mathbf{z}_n+(\mathbf{I}-\mathbf{J}_{n-1}\mathbf{A})\boldsymbol{\mu}_{n-1},(\mathbf{I}-\mathbf{J}_{n-1}\mathbf{A})\mathbf{V}_{n-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Psi}&=(\mathbf{V}_{n-1}^{-1}+\mathbf{A}^T\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\\
&=\mathbf{V}_{n-1}-\mathbf{V}_{n-1}\mathbf{A}^T(\boldsymbol{\Gamma}+\mathbf{A}\mathbf{V}_{n-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}_{n-1} \quad\leftarrow(C.7)\\
&=\mathbf{V}_{n-1}-\mathbf{V}_{n-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}_{n-1}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}_{n-1} \quad\leftarrow(13.88)\\
&=\mathbf{V}_{n-1}-\mathbf{J}_{n-1}\mathbf{A}\mathbf{V}_{n-1} \quad\leftarrow(13.102)\\
&=(\mathbf{I}-\mathbf{J}_{n-1}\mathbf{A})\mathbf{V}_{n-1}\\
\boldsymbol{\Psi}\mathbf{A}^T\boldsymbol{\Gamma}^{-1}&=(\mathbf{V}_{n-1}^{-1}+\mathbf{A}^T\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\\
&=\mathbf{V}_{n-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{V}_{n-1}\mathbf{A}^T+\boldsymbol{\Gamma})^{-1} \quad\leftarrow(C.5)\\
&=\mathbf{V}_{n-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}_{n-1}^{-1} \quad\leftarrow(13.88)\\
&=\mathbf{J}_{n-1} \quad\leftarrow(13.102)
\end{aligned}$$

である。さらに

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}(\mathbf{z}_n|\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_{n-1},\mathbf{P}_{n-1})\,\mathcal{N}(\mathbf{x}_n|\mathbf{C}\mathbf{z}_n,\boldsymbol{\Sigma})\\
&=\mathcal{N}(\mathbf{x}_n|\mathbf{C}\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_{n-1},\boldsymbol{\Sigma}+\mathbf{C}\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{C}^T)\times \quad\leftarrow(2.115)\\
&\qquad\mathcal{N}(\mathbf{z}_n|\mathbf{M}(\mathbf{C}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{x}_n+\mathbf{P}_{n-1}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_{n-1}),\mathbf{M}) \quad\leftarrow(2.116)\\
&\qquad \text{ただし } \mathbf{M}=(\mathbf{P}_{n-1}^{-1}+\mathbf{C}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{C})^{-1} \quad\leftarrow(2.117)\\
&=c_n\mathcal{N}(\mathbf{z}_n|\mathbf{K}_n\mathbf{x}_n+(\mathbf{I}-\mathbf{K}_n\mathbf{C})\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{P}_{n-1}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_{n-1},(\mathbf{I}-\mathbf{K}_n\mathbf{C})\mathbf{P}_{n-1}) \quad\leftarrow(13.91)\\
&=c_n\mathcal{N}(\mathbf{z}_n|\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_{n-1}+\mathbf{K}_n(\mathbf{x}_n-\mathbf{C}\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_{n-1}),(\mathbf{I}-\mathbf{K}_n\mathbf{C})\mathbf{P}_{n-1})\\
&=c_n\mathcal{N}(\mathbf{z}_n|\boldsymbol{\mu}_n,\mathbf{V}_n) \quad\leftarrow(13.89),\ (13.90)\\
&=c_n\hat{\alpha}(\mathbf{z}_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}&=(\mathbf{P}_{n-1}^{-1}+\mathbf{C}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\\
&=\mathbf{P}_{n-1}-\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{C}^T(\boldsymbol{\Sigma}+\mathbf{C}\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{C}^T)^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}_{n-1} \quad\leftarrow(C.7)\\
&=\mathbf{P}_{n-1}-\mathbf{K}_n\mathbf{C}\mathbf{P}_{n-1} \quad\leftarrow(13.92)\\
&=(\mathbf{I}-\mathbf{K}_n\mathbf{C})\mathbf{P}_{n-1}\\
\mathbf{M}\mathbf{C}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}&=(\mathbf{P}_{n-1}^{-1}+\mathbf{C}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\\
&=\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{C}^T+\boldsymbol{\Sigma})^{-1} \quad\leftarrow(C.5)\\
&=\mathbf{K}_n \quad\leftarrow(13.92)
\end{aligned}$$

これらを (13.103) に入れて

$$\begin{aligned}
\xi(\mathbf{z}_{n-1},\mathbf{z}_n)&=\frac{\mathcal{N}(\mathbf{z}_{n-1}|\mathbf{J}_{n-1}\mathbf{z}_n+(\mathbf{I}-\mathbf{J}_{n-1}\mathbf{A})\boldsymbol{\mu}_{n-1},(\mathbf{I}-\mathbf{J}_{n-1}\mathbf{A})\mathbf{V}_{n-1})\,c_n\hat{\alpha}(\mathbf{z}_n)\,\mathcal{N}(\mathbf{z}_n|\hat{\boldsymbol{\mu}}_n,\hat{\mathbf{V}}_n)}{c_n\hat{\alpha}(\mathbf{z}_n)}\\
&=\mathcal{N}(\mathbf{z}_{n-1}|\mathbf{J}_{n-1}\mathbf{z}_n+(\mathbf{I}-\mathbf{J}_{n-1}\mathbf{A})\boldsymbol{\mu}_{n-1},(\mathbf{I}-\mathbf{J}_{n-1}\mathbf{A})\mathbf{V}_{n-1})\,\mathcal{N}(\mathbf{z}_n|\hat{\boldsymbol{\mu}}_n,\hat{\mathbf{V}}_n)\cdots(13.103)'
\end{aligned}$$

を得る。

(13.103)' の右辺は線形ガウスモデルの周辺分布と条件付分布の積になっているので

2.3.3節より $\mathbf{z}_{n-1}$ と $\mathbf{z}_n$ の同時分布はガウス分布で、(2.108)より平均は

$$
\mathbb{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{z}_n\\ \mathbf{z}_{n-1}\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{\mu}}_n \\ \mathbf{J}_{n-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}_n + (\mathbf{I}-\mathbf{J}_{n-1}\mathbf{A})\boldsymbol{\mu}_{n-1}\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{\mu}}_n \\ \boldsymbol{\mu}_{n-1} + \mathbf{J}_{n-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_n - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_{n-1})\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{\mu}}_n \\ \hat{\boldsymbol{\mu}}_{n-1}\end{pmatrix} \leftarrow (13.100)
$$

となる。

(2.105)より $\mathbf{z}_{n-1}$ と $\mathbf{z}_n$ の同時分布の共分散行列は

$$
\mathrm{cov}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{z}_n\\ \mathbf{z}_{n-1}\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}\hat{\mathbf{V}}_n & \hat{\mathbf{V}}_n \mathbf{J}_{n-1}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{J}_{n-1}\hat{\mathbf{V}}_n & (\mathbf{I}-\mathbf{J}_{n-1}\mathbf{A})\mathbf{V}_{n-1} + \mathbf{J}_{n-1}\hat{\mathbf{V}}_n\mathbf{J}_{n-1}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}
$$

となる。(2.78)より $\mathbf{z}_{n-1}$ と $\mathbf{z}_n$ の共分散は2行1列の要素になるので

$$
\mathrm{cov}[\mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n] = \mathbf{J}_{n-1}\hat{\mathbf{V}}_n \quad \cdots (13.104)
$$

を得る。