13.6

(13.18) より

$$\pi_k^{new} = \frac{\gamma^{old}(z_{1k})}{\sum_{j=1}^{K} \gamma^{old}(z_{1j})}$$

(13.15) より

$$\gamma^{old}(z_{1k}) = \sum_{\mathbf{z}_1} \gamma^{old}(\mathbf{z}_1) z_{1k} = \sum_{\mathbf{z}_1} p(\mathbf{z}_1 | \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}^{old}) z_{1k}$$

$$\propto \sum_{\mathbf{z}_1} p(\mathbf{z}_1 | \boldsymbol{\theta}^{old}) p(\mathbf{X} | \mathbf{z}_1, \boldsymbol{\theta}^{old}) z_{1k}$$

$$= p(\mathbf{z}_1 = (z_{1k}=1) | \boldsymbol{\theta}^{old}) \, p(\mathbf{X} | \mathbf{z}_1 = (z_{1k}=1), \boldsymbol{\theta}^{old})$$

$$= \pi_k^{old} p(\mathbf{X} | \mathbf{z}_1 = (z_{1k}=1), \boldsymbol{\theta}^{old})$$

Estepでは $\mathbf{X}$ は観測値に固定されるので $p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta}^{old})$ は定数あつかいしてよい

$$p(\mathbf{z}_1 | \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}^{old}) = \frac{p(\mathbf{z}_1, \mathbf{X} | \boldsymbol{\theta}^{old})}{p(\mathbf{X} | \boldsymbol{\theta}^{old})}$$

$$\propto p(\mathbf{z}_1, \mathbf{X} | \boldsymbol{\theta}^{old})$$

$$= p(\mathbf{z}_1 | \boldsymbol{\theta}^{old}) p(\mathbf{X} | \mathbf{z}_1, \boldsymbol{\theta}^{old})$$

$\mathbf{z}_1$ は $\boldsymbol{\pi}$ に依存し、$\mathbf{A}, \boldsymbol{\phi}$ とは独立なので

$p(\mathbf{z}_1 | \boldsymbol{\theta}) = p(\mathbf{z}_1 | \boldsymbol{\pi}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\phi}) = p(\mathbf{z}_1 | \boldsymbol{\pi})$

また (13.8) より $p(\mathbf{z}_1 | \boldsymbol{\pi}) = \prod_{k=1}^{K} \pi_k^{z_{1k}}$

よって $p(\mathbf{z}_1 = (z_{1k}=1) | \boldsymbol{\pi}) = \pi_k$

$z_{1k}=1$ のとき
$j \neq k$ について $z_{1j}=0$ である

よって $\pi_k^{old} = 0$ ならば

$$\gamma^{old}(z_{1k}) = 0$$

となり

$$\pi_k^{new} = 0$$

となる。

(13.19)より

$$A_{jk}^{new} = \frac{\sum_{n=2}^{N} \xi^{old}(z_{n-1,j}, z_{nk})}{\sum_{\ell=1}^{K} \sum_{n=2}^{N} \xi^{old}(z_{n-1,j}, z_{n\ell})}$$

ここで(13.16)より

$$\xi^{old}(z_{n-1,j}, z_{nk}) = \sum_{\mathbf{z}_{n-1}} \sum_{\mathbf{z}_n} \xi(\mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n) z_{n-1,j} z_{nk}$$

$$= \sum_{\mathbf{z}_{n-1}} \sum_{\mathbf{z}_n} p(\mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n | \mathbf{X}, \theta^{old}) z_{n-1,j} z_{nk}$$

$$\propto \sum_{\mathbf{z}_{n-1}} \sum_{\mathbf{z}_n} p(\mathbf{X} | \mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n, \theta^{old}) p(\mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n | \theta^{old}) z_{n-1,j} z_{nk}$$

$$= p(\mathbf{X} | \mathbf{z}_{n-1} = (z_{n-1,j}=1), \mathbf{z}_n = (z_{nk}=1), \theta^{old}) p(\mathbf{z}_{n-1} = (z_{n-1,j}=1), \mathbf{z}_n = (z_{nk}=1) | \theta^{old})$$

$$= p(\mathbf{X} | \mathbf{z}_{n-1} = (z_{n-1,j}=1), \mathbf{z}_n = (z_{nk}=1), \theta^{old}) p(\mathbf{z}_n = (z_{nk}=1) | \mathbf{z}_{n-1} = (z_{n-1,j}=1), \theta^{old}) p(\mathbf{z}_{n-1} = (z_{n-1,j}=1) | \theta^{old})$$

$$= p(\mathbf{X} | \mathbf{z}_{n-1} = (z_{n-1,j}=1), \mathbf{z}_n = (z_{nk}=1), \theta^{old}) A_{jk}^{old} p(\mathbf{z}_{n-1} = (z_{n-1,j}=1) | \theta^{old})$$

Estepにおいては$\mathbf{X}$は観測値に固定されるから
$p(\mathbf{X}|\theta^{old})$は比例定数と思ってよい

$$p(\mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n | \mathbf{X}, \theta^{old}) = \frac{p(\mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n, \mathbf{X} | \theta^{old})}{p(\mathbf{X} | \theta^{old})}$$

$$= \frac{p(\mathbf{X} | \mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n, \theta^{old}) p(\mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n | \theta^{old})}{p(\mathbf{X} | \theta^{old})}$$

$$\propto p(\mathbf{X} | \mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n, \theta^{old}) p(\mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{z}_n | \theta^{old})$$

(13.7)より

$$p(\mathbf{z}_n | \mathbf{z}_{n-1}, \mathbf{A}) = \prod_{k=1}^{K} \prod_{j=1}^{K} A_{jk}^{z_{n-1,j} z_{nk}}$$

よって

$$p(\mathbf{z}_n = (z_{nk}=1) | \mathbf{z}_{n-1} = (z_{n-1,j}=1), \mathbf{A}) = A_{jk}$$

$z_{nk}=1$より
$z_{n\ell}=0 \ (\ell \neq k)$

$z_{n-1,j}=1$より
$z_{n-1,m}=0 \ (m \neq j)$

である。

よって $A_{jk}^{old} = 0$ ならば

$$\xi^{old}(z_{n-1,j}, z_{nk}) = 0$$

となり、これより

$$A_{jk}^{new} = 0$$

となる。