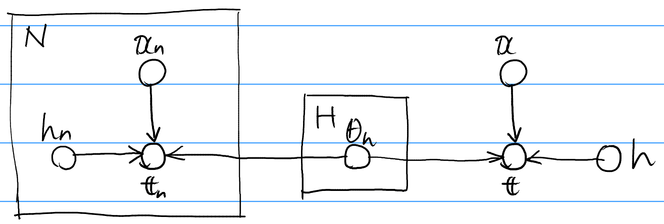
14.1

問題文でモデル変数が h と z_n と2つ与えられている。
特に z_n はモデル変数 h に属する変数でさらに z_n 自身もモデル変数として機能する。
これはちょっと複雑すぎて何が何やらわからない。
なので z_n は除いて、モデル変数 h のみ考えることにする。

(モデル結合の場合)

モデル結合において、モデル変数は $(\mathbf{t}_n, x_n)$, $(\mathbf{t}, x)$ 毎に存在する。
ということに注意して、他の変数のリンクは適当に仮定してモデル図を考える。



$\theta = \{\theta_h\}$, $\mathbb{X} = \{x_n\}$, $\mathbb{T} = \{\mathbf{t}_n\}$ とする

$$
\begin{aligned}
p(\mathbf{t} | x, \mathbb{X}, \mathbb{T}) &= \int p(\mathbf{t}, \theta | x, \mathbb{X}, \mathbb{T})\, d\theta \quad \leftarrow \text{加法定り} \\
&= \int p(\mathbf{t} | \theta, x, \mathbb{X}, \mathbb{T})\, p(\theta | x, \mathbb{X}, \mathbb{T})\, d\theta \quad \leftarrow \text{乗法定理} \\
&= \int p(\mathbf{t} | \theta, x)\, p(\theta | \mathbb{X}, \mathbb{T})\, d\theta
\end{aligned}
$$

$\mathbf{t} \perp\!\!\!\perp \theta | \mathbb{X}, \mathbb{T}$

$$
\begin{aligned}
p(\theta | x, \mathbb{X}, \mathbb{T}) &= \frac{p(\theta, \mathbb{X}, \mathbb{T} | x)}{p(\mathbb{X}, \mathbb{T} | x)} \\
&= \frac{p(\mathbb{X}, \mathbb{T} | \theta, x)\, p(\theta | x)}{p(\mathbb{X}, \mathbb{T} | x)} \\
&= \frac{p(\mathbb{X}, \mathbb{T} | \theta)\, p(\theta)}{p(\mathbb{X}, \mathbb{T})} \quad \leftarrow \begin{cases} \mathbb{X}, \mathbb{T} \perp\!\!\!\perp x | \theta \\ \theta \perp\!\!\!\perp x | \emptyset \end{cases} \\
&= p(\theta | \mathbb{X}, \mathbb{T})
\end{aligned}
$$

ここで

$$
p(\mathbf{t} | \theta, x) = \sum_{h=1}^{H} p(\mathbf{t}, h | \theta, x) = \sum_{h=1}^{H} p(\mathbf{t} | h, \theta, x)\, p(h)
$$

加法定理　乗法定理

また

$$
\begin{aligned}
p(\theta | \mathbb{X}, \mathbb{T}) &= \frac{p(\theta, \mathbb{X}, \mathbb{T})}{p(\mathbb{X}, \mathbb{T})} \quad \leftarrow \mathbb{X}, \mathbb{T} \text{は訓練データに固定なので} p(\mathbb{X}, \mathbb{T}) \text{は定数} \\
&\propto p(\theta, \mathbb{X}, \mathbb{T}) = p(\mathbb{X}, \mathbb{T} | \theta)\, p(\theta) \quad \leftarrow \text{乗法定理} \\
&= \prod_{n=1}^{N} p(x_n, \mathbf{t}_n | \theta)\, p(\theta) \quad \leftarrow (x_n, \mathbf{t}_n) \text{は独立と仮定しているので} \\
&= \prod_{n=1}^{N} \sum_{h_n=1}^{H} p(x_n, \mathbf{t}_n, h_n | \theta)\, p(\theta) \quad \leftarrow \text{加法定理} \\
&= \prod_{n=1}^{N} \sum_{h_n=1}^{H} p(x_n, \mathbf{t}_n | h_n, \theta)\, p(h_n | \theta)\, p(\theta) \quad \leftarrow \text{乗法定理} \\
&= \prod_{n=1}^{N} \sum_{h_n=1}^{H} p(x_n, \mathbf{t}_n | h_n, \theta)\, p(h_n)\, p(\theta) \quad \leftarrow h_n \perp\!\!\!\perp \theta | \emptyset
\end{aligned}
$$

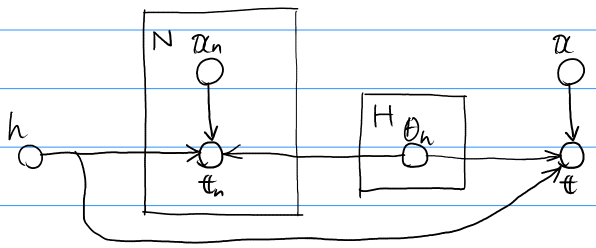
よって

$$
p(\mathbf{t} | x, \mathbb{X}, \mathbb{T}) \propto \int \left\{ \sum_{h=1}^{H} p(\mathbf{t} | h, \theta, x)\, p(h) \right\} \left\{ \prod_{n=1}^{N} \sum_{h_n=1}^{H} p(x_n, \mathbf{t}_n | h_n, \theta)\, p(h_n)\, p(\theta) \right\} d\theta
$$

となる。各々の $(\mathbf{t}_n, x_n)$, $(\mathbf{t}, x)$ 毎に別々のモデル変数 h_n, h が存在しているのが確認できる。

(ベイズモデル平均の場合)

ベイズモデル平均において、モデル変数 h は全ての(t_n, x_n), (t, x)に共通に存在する。
ということに注意して、他の変数のリンクは適当に仮定してモデル図を考える。



$\theta = \{\theta_h\}$, $\mathbb{X} = \{x_n\}$, $\mathbb{T} = \{t_n\}$ とする

$$p(t \mid x, \mathbb{X}, \mathbb{T}) = \sum_{h=1}^{H} \int p(t, \theta, h \mid x, \mathbb{X}, \mathbb{T}) \, d\theta$$

$$= \sum_{h=1}^{H} \int p(t \mid \theta, h, x, \mathbb{X}, \mathbb{T}) \, p(\theta, h \mid x, \mathbb{X}, \mathbb{T}) \, d\theta$$

$$= \sum_{h=1}^{H} \int p(t \mid \theta, h, x) \, p(\theta, h \mid \mathbb{X}, \mathbb{T}) \, d\theta$$

$t \perp\!\!\!\perp \mathbb{X}, \mathbb{T} \mid \theta$

$\theta, h \perp\!\!\!\perp x \mid \emptyset$

ここで

$$p(\theta, h \mid \mathbb{X}, \mathbb{T}) = \frac{p(\theta, h, \mathbb{X}, \mathbb{T})}{p(\mathbb{X}, \mathbb{T})}$$

$\mathbb{X}, \mathbb{T}$ は訓練値に固定なので $p(\mathbb{X}, \mathbb{T})$ は定数

$$\propto p(\mathbb{X}, \mathbb{T} \mid \theta, h) \, p(\theta, h) = p(\mathbb{X}, \mathbb{T} \mid \theta, h) \, p(\theta)$$

$\theta \perp\!\!\!\perp h \mid \emptyset$

$$= \prod_{n=1}^{N} p(x_n, t_n \mid \theta, h) \, p(\theta)$$

$(x_1, t_1) \cdots (x_N, t_N)$ は独立なので

よって

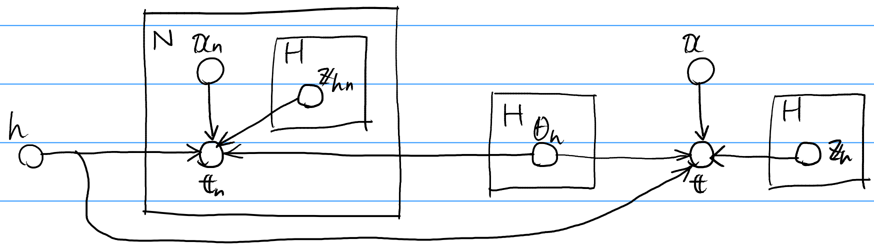
$$p(t \mid x, \mathbb{X}, \mathbb{T}) = \sum_{h=1}^{H} \int p(t \mid \theta, h, x) \prod_{n=1}^{N} p(x_n, t_n \mid \theta, h) \, p(\theta) \, d\theta$$

となる。

すべての(t_n, x_n), (t, x)に共通の1つのモデル変数 h が存在しているのが確認できる。

(webの解答について)

webの解答ではおそらくベイズモデル平均とモデル結合の混在したモデル図を考えていると思われる。こんな感じ



h はベイズモデル平均のためのモデル変数で

z_h, z_{hn} はモデル結合のためのモデル変数である。