14.13

(9.10), (9.11) と同様に

$$p(\mathbf{z}|\theta)=\prod_{k=1}^{K}\pi_k^{z_k}$$

$$p(t|\mathbf{z},\theta)=\prod_{k=1}^{K}\mathcal{N}(t|\mathbf{w}_k^T\boldsymbol{\phi},\beta^{-1})^{z_k}$$

である。これより

$$p(t,\mathbf{z}|\theta)=p(t|\mathbf{z},\theta)p(\mathbf{z}|\theta)=\prod_{k=1}^{K}\mathcal{N}(t|\mathbf{w}_k^T\boldsymbol{\phi},\beta^{-1})^{z_k}\prod_{k=1}^{K}\pi_k^{z_k}$$

$$=\prod_{k=1}^{K}\left\{\pi_k\mathcal{N}(t|\mathbf{w}_k^T\boldsymbol{\phi},\beta^{-1})\right\}^{z_k}$$

$(t_1,\mathbf{z}_1)\cdots(t_N,\mathbf{z}_N)$ は iid なので

$$p(\mathbf{t},\mathbf{Z}|\theta)=\prod_{n=1}^{N}p(t_n,\mathbf{z}_n|\theta)$$

$$=\prod_{n=1}^{N}\prod_{k=1}^{K}\left\{\pi_k\mathcal{N}(t_n|\mathbf{w}_k^T\boldsymbol{\phi}_n,\beta^{-1})\right\}^{z_{nk}}$$

両辺の対数を取って

$$\ln p(\mathbf{t},\mathbf{Z}|\theta)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}z_{nk}\ln\left\{\pi_k\mathcal{N}(t_n|\mathbf{w}_k^T\boldsymbol{\phi}_n,\beta^{-1})\right\}\quad\cdots(14.36)$$

を得る。