14.3

イェンセン不等式

$$f\left(\sum_{i=1}^{M}\lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{M}\lambda_i f(x_i) \quad \cdots (1.115)$$

ただし f は凸関数

において、$\lambda_i = \frac{1}{M}$, $x_i = \varepsilon_i(x)$, $f(x) = x^2$ とすると

$$\left(\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{M}\varepsilon_i(x)\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{M}\frac{1}{M}\varepsilon_i^2(x)$$

を得る。両辺に $p(x)$ をかけて x で積分すると

$$\int p(x)\left(\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{M}\varepsilon_i(x)\right)^2 dx \leq \int p(x)\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{M}\varepsilon_i^2(x)\,dx$$

となる。これより

$$E_x\left[\left(\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{M}\varepsilon_i(x)\right)^2\right] \leq E_x\left[\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{M}\varepsilon_i^2(x)\right]$$

$$\therefore\ E_x\left[\left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\varepsilon_i(x)\right)^2\right] \leq \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}E_x\left[\varepsilon_i^2(x)\right]$$

期待値の線形性より
$E[a+b] = E[a] + E[b]$
$E[ka] = kE[a]$

(14.10), (14.11) を入れて

$$E_{COM} \leq E_{AV}$$

を得る。