6.12

(6.27) $k(A_1, A_2) = 2^{|A_1 \cap A_2|}$, $|A|$ = 集合Aの要素数

(6.95) $\phi_U(A) = \begin{cases} 1, & U \subseteq A \text{ のとき} \\ 0 & \text{other} \end{cases}$, $\phi_U(A)$ は $\phi(A)$ の要素

(実験)

$D = \{1, 2, 3\}$ の場合を考える

Dのすべての部分集合の空間をFとする。(← D上の部分集合族という)

$F = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$|F|=8$, $|D|=3$なので $|F| = 2^{|D|}$ である。(←但しこの式は一般的に成立する)

(6.27)で $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{2,3\}$ とすると

$k(\{1,2\}, \{2,3\}) = 2^{|\{1,2\} \cap \{2,3\}|} = 2^{|\{2\}|} = 2$ … ①

(6.95)で $U = \{1,2\}$とすると $\phi_U(A)$ はこんな感じになる。

$\phi_{\{1,2\}}(\{1,2,3\}) = 1$, $\{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$ なので

$\phi_{\{1,2\}}(\{2,3\}) = 0$, $\{1,2\} \subseteq \{2,3\}$ではないので

$\phi(A)$の要素が$\phi_U(A)$なので

$$\phi(A) = \begin{pmatrix} \phi_{\varnothing}(A) \\ \phi_{\{1\}}(A) \\ \phi_{\{2\}}(A) \\ \phi_{\{3\}}(A) \\ \phi_{\{1,2\}}(A) \\ \phi_{\{1,3\}}(A) \\ \phi_{\{2,3\}}(A) \\ \phi_{\{1,2,3\}}(A) \end{pmatrix}$$

となる。$\phi(A)$の次元は $2^{|D|} = 8$ である。

これより

$$\phi^T(\{1,2\}) = (1,1,1,0,1,0,0,0)$$

$$\phi^T(\{2,3\}) = (1,0,1,1,0,0,1,0)$$

よって

$$\phi^T(\{1,2\})\phi(\{2,3\}) = 1\times1+1\times0+1\times1+0\times1+1\times0+0\times0+0\times1+0\times0 = 2 \cdots ②$$

①, ② より

$$k(\{1,2\},\{2,3\}) = 2^{|\{1,2\}\cap\{2,3\}|} = \phi^T(\{1,2\})\phi(\{2,3\})$$

となっているのがわかる。

(目標) $k(A_1, A_2) = 2^{|A_1\cap A_2|} = \phi^T(A_1)\phi(A_2)$ を示す。

これが示されたら、(6.1) より k は有効なカーネルとなる。

$2^{|A_1\cap A_2|}$ は A_1 と A_2 の共通集合の部分集合族の個数である。…①

$\phi(A_1)$ は A_1 の部分集合になってる要素 U のみ 1 で他は 0 である

$\phi(A_2)$ は A_2 〃 〃 …②

よって

$\phi(A_1)^T\phi(A_2) =$ A_1 の部分集合でありかつ A_2 の部分集合である U の個数である。

ここで U が A_1 の部分集合でありかつ A_2 の部分集合であるならば
U の要素は A_1 にも A_2 にも含まれる
即ち U は A_1 と A_2 の共通集合の部分集合族に含まれる

逆に U が A_1 と A_2 の共通集合の部分集合族に含まれるならば
U の要素は A_1 にも A_2 にも含まれる
即ち U は A_1 の部分集合でありかつ A_2 の部分集合である。

よって①と②は等しい 即ち $k(A_1,A_2) = 2^{|A_1\cap A_2|} = \phi(A_1)^T\phi(A_2)$ である。