6.14

$p(x|\mu)=N(x|\mu,S)$のフィッシャーカーネルを求める。

ただし、Webの解答によるとSは固定で良いとのこと

2次元の場合を考える。

$(Ax)_i =$

$\frac{\partial}{\partial x} x^T A x = 2Ax$

$(x^TAx) = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$

$\frac{\partial}{\partial x_i}(x^TAx)=$

$$\mu = (\mu_1, \mu_2), \quad x = (x_1, x_2), \quad S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$$

$$p(x|\mu)=N(x|\mu,S)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|S|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T S^{-1}(x-\mu)\right\}$$

$\left\{\begin{pmatrix} S_{11}^{-1} & S_{12}^{-1} \\ S_{21}^{-1} & S_{22}^{-1} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} S_{11}^{-1} & S_{12}^{-1} \\ S_{21}^{-1} & S_{22}^{-1} \end{pmatrix}^T\right\}$

$\{S^{-1}+(S^{-1})^T\}(x-\mu)$

$$\begin{aligned}
\ln p(x|\mu) &= \ln\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|S|^{1/2}}-\frac{1}{2}(x-\mu)^T S^{-1}(x-\mu) \\
&= \ln\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|S|^{1/2}}-\frac{1}{2}(x_1-\mu_1, x_2-\mu_2)\begin{pmatrix} S_{11}^{-1} & S_{12}^{-1} \\ S_{21}^{-1} & S_{22}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{pmatrix} \\
&= \ln\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|S|^{1/2}}-\frac{1}{2}\left[(x_1-\mu_1)\{S_{11}^{-1}(x_1-\mu_1)+S_{12}^{-1}(x_2-\mu_2)\}+(x_2-\mu_2)\{S_{21}^{-1}(x_1-\mu_1)+S_{22}^{-1}(x_2-\mu_2)\}\right] \\
&= \ln\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|S|^{1/2}}-\frac{1}{2}\{S_{11}^{-1}(x_1-\mu_1)^2+S_{12}^{-1}(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)+S_{21}^{-1}(x_2-\mu_2)(x_1-\mu_1)+S_{22}^{-1}(x_2-\mu_2)^2\}
\end{aligned}$$

フィッシャースコア

$$g(\mu,x)=\nabla_\mu \ln p(x|\mu)=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\mu_1}\ln p(x|\mu) \\ \frac{\partial}{\partial\mu_2}\ln p(x|\mu) \end{pmatrix}=\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 2S_{11}^{-1}(x_1-\mu_1)(-1)+S_{12}^{-1}(-1)(x_2-\mu_2)+S_{21}^{-1}(x_2-\mu_2)(-1) \\ S_{12}^{-1}(x_1-\mu_1)(-1)+S_{21}^{-1}(-1)(x_1-\mu_1)+2S_{22}^{-1}(x_2-\mu_2)(-1) \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2S_{11}^{-1}(x_1-\mu_1)+(S_{12}^{-1}+S_{21}^{-1})(x_2-\mu_2) \\ (S_{12}^{-1}+S_{21}^{-1})(x_1-\mu_1)+2S_{22}^{-1}(x_2-\mu_2) \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2S_{11}^{-1} & 2S_{12}^{-1} \\ 2S_{21}^{-1} & 2S_{22}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{pmatrix}=S^{-1}(x-\mu)$$

(付録CよりSは対称なのでS^{-1}も対称なので$S_{12}^{-1}=S_{21}^{-1}$

$$F=E_x[g(\mu,x)g(\mu,x)^T]$$

$$=S^{-1}\underbrace{\int(x-\mu)(x-\mu)^T\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|S|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^TS^{-1}(x-\mu)\right\}dx}_{\text{がガウス分布の共分散になっているので}S\text{に等しい}}(S^{-1})^T$$

$$=S^{-1}S(S^{-1})^T=(S^{-1})^T\underset{S^{-1}\text{は対称}}{=}S^{-1}$$

これより

$$\begin{aligned}
k(x,x') &= g(\mu,x)^T F^{-1} g(\mu,x') \\
&= (x-\mu)^T(S^{-1})^T S S^{-1}(x'-\mu)=(x-\mu)^T S^{-1}(x'-\mu)
\end{aligned}$$

を得る。