6.15

ノートのタイトル 2016/02/03

$\{x_1, x_2\}$についてのグラム行列は、

$$K = \begin{pmatrix} k(x_1,x_1) & k(x_1,x_2) \\ k(x_2,x_1) & k(x_2,x_2) \end{pmatrix}$$

である

固有値方程式は

$$|K - \lambda I| = 0$$

これより

$$(k_{11}-\lambda)(k_{22}-\lambda) - k_{12}k_{21} = 0, \quad k_{11} = k(x_1,x_1), k_{22} = k(x_2,x_2), k_{12} = k(x_1,x_2), k_{21} = k(x_2,x_1)$$

$$\therefore \lambda^2 - (k_{11}+k_{22})\lambda + k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} = 0$$

よって

$$\lambda = \frac{(k_{11}+k_{22}) \pm \sqrt{(k_{11}+k_{22})^2 - 4(k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21})}}{2}$$

Kを半正定値とすると(⇐問題文は正定値となってるが多分半正定値)

$$\lambda \geq 0$$

よって

$$(k_{11}+k_{22}) \pm \sqrt{(k_{11}+k_{22})^2 - 4(k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21})} \geq 0$$

$$\therefore (k_{11}+k_{22}) \geq \sqrt{(k_{11}+k_{22})^2 - 4(k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21})}$$

$\sqrt{\cdot}$は正なので両辺を2乗して

$$(k_{11}+k_{22})^2 \geq (k_{11}+k_{22})^2 - 4(k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21})$$

$$\therefore k_{12}k_{21} \leq k_{11}k_{22}$$

これより

$$k(x_1,x_2)k(x_2,x_1) \leq k(x_1,x_1)k(x_2,x_2)$$

また、kは対称なので

$$k(x_1,x_2)^2 \leq k(x_1,x_1)k(x_2,x_2)$$

を得る。