6.18

$$f(x,t) = f(z) = \mathcal{N}(z|0,\sigma^2 I) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{1}{2}z^T\frac{1}{\sigma^2}Iz\right\}, \quad z=(x,t)$$

とする。zを成分表示すると

ガウス積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x,t)\frac{1}{\sigma^2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+t^2)\right\}$$

となる。このとき(6.47)より

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+t^2)\right\}dt = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\sqrt{2\pi\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

となる。(6.46)より

$$k(x,x_n) = \frac{\exp\left\{-\frac{(x-x_n)^2}{2\sigma^2}\right\}}{\sum_m \exp\left\{-\frac{(x-x_m)^2}{2\sigma^2}\right\}} \quad \cdots ①$$

ガウス積分

(6.48)に出てくる積分について

$$\int f(x-x_n,t-t_n)dt = \int\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sigma^2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\{(x-x_n)^2+(t-t_n)^2\}\right]dt = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{(x-x_n)^2}{2\sigma^2}\right\}\int\exp\left\{-\frac{(t-t_n)^2}{2\sigma^2}\right\}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{(x-x_n)^2}{2\sigma^2}\right\}\sqrt{2\pi\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(x-x_n)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

よって(6.48)より

$$p(t|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\frac{\sum_n \exp\left\{-\frac{(x-x_n)^2+(t-t_n)^2}{2\sigma^2}\right\}}{\sum_m \exp\left\{-\frac{(x-x_m)^2}{2\sigma^2}\right\}} \underset{①}{=} \sum_n k(x,x_n)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(t-t_n)^2}{2\sigma^2}\right\} = \sum_n k(x,x_n)\cdot\mathcal{N}(t|t_n,\sigma^2)$$

を得る。また、

t_n 期待値 = 分布の平均

$$E[t|x] = \int t\,p(t|x)dt = \int t\sum_n k(x,x_n)\mathcal{N}(t|t_n,\sigma^2)dt = \sum_n k(x,x_n)\int t\,\mathcal{N}(t|t_n,\sigma^2)dt = \sum_n k(x,x_n)t_n$$

である。さらに

t^2の期待値 = 分布の分散

$$\mathrm{var}[t|x] = \int t^2 p(t|x)dt = \int t^2\sum k(x,x_n)\mathcal{N}(t|t_n,\sigma^2)dt = \sum_n k(x,x_n)\int t^2\mathcal{N}(t|t_n,\sigma^2)dt = \sum_n k(x,x_n)\sigma^2$$

である。