6.26

$p(a_{N+1}|t_N)$ の平均,分散を導け

平均: $E[a_{N+1}|t_N] = k^T(t_N - \sigma_N)$ ‥ (6.87)

分散: $var[a_{N+1}|t_N] = c - k^T(W_N^{-1} + C_N)^{-1} k$ ‥ (6.88)

$$p(a_N|t_N) \simeq q(a_N) = \mathcal{N}(a_N|a_N^*, H^{-1}) \quad \cdots (6.86)$$

$$p(a_{N+1}|a_N) = \mathcal{N}(a_{N+1}|\underbrace{k^T C_N^{-1} a_N}_{a_N\text{の1次式}}, c - k^T C_N^{-1} k) \quad \cdot\cdot (6.78)$$

これらは線型ガウスモデルになっているので

$$p(a_{N+1}|t_N) = \int p(a_{N+1}|a_N) p(a_N|t_N) da_N \quad \cdots (6.77)$$

の平均と分散は(2.115)で与えられる

$$E[a_{N+1}|t_N] = k^T C_N^{-1} a_N^* \underset{(6.84)}{=} k^T C_N^{-1} C_N (t_N - \sigma_N) = k^T(t_N - \sigma_N) \quad \cdots (6.87)$$

$$var[a_{N+1}|t_N] = c - k^T C_N^{-1} k + k^T C_N^{-1} H^{-1} (k^T C_N^{-1})^T$$

C_Nは対称なのでC_N^{-1}も対称

$$= c - k^T C_N^{-1} k + k^T C_N^{-1} H^{-1} C_N^{-1} k$$

$$\overset{(6.85)}{=} c - k^T C_N^{-1} k + k^T C_N^{-1} (W_N + C_N^{-1})^{-1} C_N^{-1} k$$

$$= c - k^T C_N^{-1} (W_N + C_N^{-1})^{-1} (W_N + C_N^{-1}) k + k^T C_N^{-1} (W_N + C_N^{-1})^{-1} C_N^{-1} k$$

$$= c - k^T C_N^{-1} (W_N + C_N^{-1})^{-1} \{(W_N + C_N^{-1}) - C_N^{-1}\} k$$

$$= c - k^T C_N^{-1} (W_N + C_N^{-1})^{-1} W_N k$$

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}(AB)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

$$= c - k^T \{W_N^{-1} (W_N + C_N^{-1}) C_N\}^{-1} k$$

$$= c - k^T \{(I + W_N^{-1} C_N^{-1}) C_N\}^{-1} k$$

$$= c - k^T (C_N + W_N^{-1})^{-1} k \quad \cdot\cdot (6.88)$$