6.7

(6.17) $k(x, x') = k_1(x, x') + k_2(x, x')$ について

$\{x_1, x_2, x_3\}$ について k のグラム行列を考える

$$K = \begin{pmatrix} k(x_1 & x_1) & k(x_1 & x_2) & k(x_1 & x_3) \\ k(x_2 & x_1) & k(x_2 & x_2) & k(x_2 & x_3) \\ k(x_3 & x_1) & k(x_3 & x_2) & k(x_3 & x_1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1(x_1\ x_1) + k_2(x_1\ x_1) & k_1(x_1\ x_2) + k_2(x_1\ x_2) & k_1(x_1\ x_3) + k_2(x_1\ x_3) \\ k_1(x_2\ x_1) + k_2(x_2\ x_1) & k_1(x_2\ x_2) + k_2(x_2\ x_2) & k_1(x_2\ x_3) + k_2(x_2\ x_3) \\ k_1(x_3\ x_1) + k_2(x_3\ x_1) & k_1(x_3\ x_2) + k_2(x_3\ x_2) & k_1(x_3\ x_3) + k_2(x_3\ x_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1(x_1\ x_1) & k_1(x_1\ x_2) & k_1(x_1\ x_3) \\ k_1(x_2\ x_1) & k_1(x_2\ x_2) & k_1(x_2\ x_3) \\ k_1(x_3\ x_1) & k_1(x_3\ x_2) & k_1(x_3\ x_3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_2(x_1\ x_1) & k_2(x_1\ x_2) & k_2(x_1\ x_3) \\ k_2(x_2\ x_1) & k_2(x_2\ x_2) & k_2(x_2\ x_3) \\ k_2(x_3\ x_1) & k_2(x_3\ x_2) & k_2(x_3\ x_3) \end{pmatrix}$$

$$= K_1 + K_2$$

k_1, k_2 は有効カーネルなので, K_1, K_2 は半正定値

$w^T K_1 w \geq 0,\ w^T K_2 w \geq 0$ なので

$$w^T K w = w^T (K_1 + K_2) w = w^T K_1 w + w^T K_2 w \geq 0$$

よって K は半正定値なので k は有効なカーネルである。

(6.18) $k(x,x') = k_1(x,x')k_2(x,x')$ について

$$k_1(x,x') = \phi(x)^T\phi(x')$$

$$k_2(x,x') = \psi(x)^T\psi(x')$$

ϕ は3次ベクトル, ψ は2次ベクトルの場合を考える

(目標) x と x' を左右に分離したい

$$k_1(x,x')k_2(x,x') = \phi^T(x)\phi(x')\psi^T(x)\psi(x')$$

$$= \{\phi_1(x)\phi_1(x') + \phi_2(x)\phi_2(x') + \phi_3(x)\phi_3(x')\}\{\psi_1(x)\psi_1(x') + \psi_2(x)\psi_2(x')\}$$

$$= \phi_1(x)\phi_1(x')\psi_1(x)\psi_1(x') + \phi_2(x)\phi_2(x')\psi_1(x)\psi_1(x') + \phi_3(x)\phi_3(x')\psi_1(x)\psi_1(x')$$

$$+ \phi_1(x)\phi_1(x')\psi_2(x)\psi_2(x') + \phi_2(x)\phi_2(x')\psi_2(x)\psi_2(x') + \phi_3(x)\phi_3(x')\psi_2(x)\psi_2(x')$$

$$= \phi_1(x)\psi_1(x)\phi_1(x')\psi_1(x') + \phi_2(x)\psi_1(x)\phi_2(x')\psi_1(x') + \phi_3(x)\psi_1(x)\phi_3(x')\psi_1(x')$$

$$+ \phi_1(x)\psi_2(x)\phi_1(x')\psi_2(x') + \phi_2(x)\psi_2(x)\phi_2(x')\psi_2(x') + \phi_3(x)\psi_2(x)\phi_3(x')\psi_2(x')$$

$$= \begin{pmatrix} \phi_1(x)\psi_1(x) & \phi_2(x)\psi_1(x) & \phi_3(x)\psi_1(x) & \phi_1(x)\psi_2(x) & \phi_2(x)\psi_2(x) & \phi_3(x)\psi_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(x')\psi_1(x') \\ \phi_2(x')\psi_1(x') \\ \phi_3(x')\psi_1(x') \\ \phi_1(x')\psi_2(x') \\ \phi_2(x')\psi_2(x') \\ \phi_3(x')\psi_2(x') \end{pmatrix}$$

$$= \varphi(x)^T\varphi(x), \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x)\psi_1(x) & \phi_2(x)\psi_1(x) & \phi_3(x)\psi_1(x) & \phi_1(x)\psi_2(x) & \phi_2(x)\psi_2(x) & \phi_3(x)\psi_2(x) \end{pmatrix}$$

なので (6.1) より (6.18) は有効なカーネルである。