6.8

ノートのタイトル 2016/01/28

(6.19) $k(x,x') = k_3(\phi(x), \phi(x'))$ について

$$k_3(\phi(x), \phi(x')) = \psi^T(\phi(x))\psi(\phi(x'))$$
$$= \varphi^T(x)\varphi(x'), \quad \varphi(x) = \psi(\phi(x))$$

なので (6.1) より (6.19) は有効なカーネルである。

(6.20) $k(x,x') = x^T A x'$, Aは対称半正定値 について

xが3次ベクトルの場合を考える

Aの固有値を$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$、固有ベクトルを$\{u_1, u_2, u_3\}$とすると

$$A = (u_1\ u_2\ u_3)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1^T\\ u_2^T\\ u_3^T\end{pmatrix}$$ (C.43) より

と書ける

$$x^T A x' = x^T (u_1\ u_2\ u_3)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1^T\\ u_2^T\\ u_3^T\end{pmatrix} x'$$

$$= (x^T u_1\ x^T u_2\ x^T u_3)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1^T x'\\ u_2^T x'\\ u_3^T x'\end{pmatrix}$$

$$= (x^T u_1\ x^T u_2\ x^T u_3)\begin{pmatrix}\lambda_1 u_1^T x'\\ \lambda_2 u_2^T x'\\ \lambda_3 u_3^T x'\end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 x^T u_1 u_1^T x' + \lambda_2 x^T u_2 u_2^T x' + \lambda_3 x^T u_3 u_3^T x'$$

$$= \lambda_1 \varphi(x)^T \varphi(x') + \lambda_2 \psi(x)^T \psi(x') + \lambda_3 \nu(x)^T \nu(x')$$

但し $\varphi(x) = u_1^T x$, $\psi(x) = u_2^T x$, $\nu(x) = u_3^T x$

(6.2) より $\varphi(x)^T \varphi(x')$, $\psi(x)^T \psi(x')$, $\nu(x)^T \nu(x')$ は有効なカーネル

また A は半正定値なので $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$

なので (6.13) 及び (6.17) より (6.20) は有効なカーネルである。