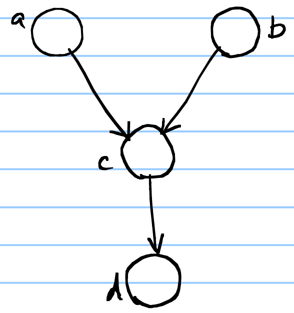
8.10



$$p(a,b,c,d) = p(d|c)\,p(c|a,b)\,p(a)\,p(b)$$

$$p(a,b) = \sum_c \sum_d p(a,b,c,d) = \sum_c \sum_d p(d|c)\,p(c|a,b)\,p(a)\,p(b)$$

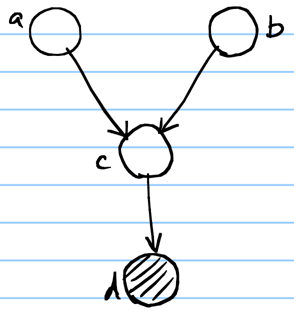
$$= p(a)p(b) \sum_c \Big\{ p(c|a,b) \underbrace{\sum_d p(d|c)}_{1} \Big\} = p(a)p(b) \underbrace{\sum_c p(c|a,b)}_{1} = p(a)p(b) \cdots ①$$

よって

$$a \perp\!\!\!\perp b \mid \emptyset$$

である。

dで条件付けした場合



$$p(a,b|d) = \frac{p(a,b,d)}{p(d)}$$

$$= \frac{p(d|a,b)\,p(a,b)}{p(d)}$$

$$= \frac{p(d|a,b)\,p(a)\,p(b)}{p(d)} \longleftarrow ①より$$

これは $p(a|d)\,p(b|d)$ に因数分解できないので $a \not\perp\!\!\!\perp b \mid d$ である。

($p(a,b|d) = \dfrac{p(d|a,b)p(a)p(b)}{p(d)}$ が $p(a|d)p(b|d)$ と因数分解できないことの証明)

$$p(a,b|d) = p(a|d)p(b|d)$$

と因数分解できるとすると

$$p(a,b,d) = p(a|d)p(b|d)p(d) \quad \cdots ②$$

となる。

ここで $p(a,b,d)$ を乗法定理で因数分解する方法は、以下の6通りに限られる。

$$\begin{aligned} p(a,b,d) &= p(a|b,d)p(b|d)p(d) \\ &= p(a|b,d)p(d|b)p(b) \\ &= p(b|a,d)p(a|d)p(d) \\ &= p(b|a,d)p(d|a)p(a) \\ &= p(d|a,b)p(a|b)p(b) \\ &= p(d|a,b)p(b|a)p(a) \end{aligned}$$

① の条件 $p(a,b) = p(a)p(b)$ 即ち $p(a|b) = p(a)$ or $p(b|a) = p(b)$ を適用すると

$$\begin{aligned} p(a,b,d) &= p(a|b,d)p(b|d)p(d) \\ &= p(a|b,d)p(d|b)p(b) \\ &= p(b|a,d)p(a|d)p(d) \\ &= p(b|a,d)p(d|a)p(a) \\ &= p(d|a,b)p(a)p(b) \\ &= p(d|a,b)p(b)p(a) \end{aligned}$$

注
$p(a,b) = p(a)p(b)$ より
$p(a|b,d) = p(a|d)$ は言えない
加法定理使って言えるのは
$\sum_b p(a|b,d)p(b) = p(a|d)$ とかである

となる。これが $p(a,b,d)$ の可能な因数分解のすべてであるが
② の因数分解は含まれておらず、② の主張と矛盾する。
よって $p(a,b|d)$ は $p(a|d)p(b|d)$ に因数分解できない。