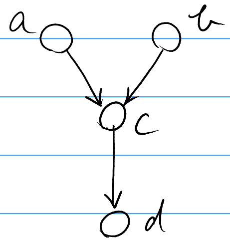
8.10



この有向グラフで表わされる確率モデルの同時分布は

$$p(a,b,c,d) = p(d|c)\,p(c|a,b)\,p(a)\,p(b) \quad \cdots ①$$

これより

$$p(a,b) = \sum_c \sum_d p(a,b,c,d) \quad \leftarrow \text{加法定理 (1.10)}$$

$$= \sum_c \sum_d p(d|c)\,p(c|a,b)\,p(a)\,p(b) \quad \leftarrow ①$$

$$= p(a)\,p(b) \sum_c \left\{ p(c|a,b) \underbrace{\sum_d p(d|c)}_{1} \right\}$$

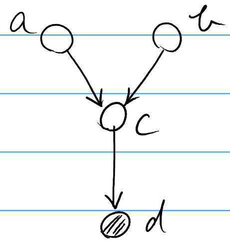
$$= p(a)\,p(b) \underbrace{\sum_c p(c|a,b)}_{1}$$

$$= p(a)\,p(b)$$

よって

$$a \perp\!\!\!\perp b \mid \emptyset$$

dで条件付けした場合



$$p(a,b|d) = \frac{p(a,b,d)}{p(d)} \leftarrow \text{乗法定理 (1.11)}$$

$$= \frac{\sum_c p(a,b,c,d)}{p(d)} \leftarrow \text{加法定理 (1.10)}$$

$$= \frac{\sum_c p(d|c)p(c|a,b)p(a)p(b)}{p(d)} \leftarrow ①$$

$$= \frac{p(a)p(b)\sum_c p(d|c)p(c|a,b)}{p(d)} \leftarrow \text{cに依らない項を和の外に出す}$$

$$= \frac{p(a)p(b)\sum_c p(d,c|a,b)}{p(d)} \leftarrow$$

$$= \frac{p(a)p(b)p(d|a,b)}{p(d)} \leftarrow \text{加法定理 (1.10)}$$

これは一般に $p(a|d)p(b|d)$ に因数分解できないので

$$a \not\perp\!\!\!\perp b \mid d$$

である。

・モデル図より

$d \perp\!\!\!\perp a,b \mid c$

よって $p(d|c) = p(d|a,b,c)$

よって

$p(d,c|a,b) = p(d|c,a,b)p(c|a,b)$ ← 加法定理

$= p(d|c)p(c|a,b)$

・若しくは

$p(a,b,c,d) = p(d|c)p(c|a,b)p(a)p(b)$ ← ①

$= p(d|c)p(c|a,b)p(a,b)$ ← 上で求めた $p(a,b)=p(a)p(b)$ より

一方

$p(a,b,c,d) = p(c,d|a,b)p(a,b)$ ← 加法定理

$\therefore p(c,d|a,b) = p(d|c)p(c|a,b)$

(因数分解できないことの証明)　　(演繹的証明は?)

反例を示す。$p(a,b|d) = \frac{p(a)p(b)p(d|a,b)}{p(d)} \neq p(a|d)p(b|d)$ となる例を示す。

a,b,c,d をそれぞれ $\{0,1\}$ をとる確率変数とし

① の因数分解を満たす確率表を考える

a	b	c	d	p(a,b,c,d)
1	1	1	1	0.0036
1	1	1	0	0.0204
1	1	0	1	0.0048
1	1	0	0	0.0912
1	0	1	1	0.00675
1	0	1	0	0.03825
1	0	0	1	0.00675
1	0	0	0	0.12825
0	1	1	1	0.0147
0	1	1	0	0.0833
0	1	0	1	0.0091
0	1	0	0	0.1729
0	0	1	1	0.02835
0	0	1	0	0.16065
0	0	0	1	0.01155
0	0	0	0	0.21945

$p(a=1,b=1,d=1) = \sum_c p(a=1,b=1,c,d=1)$

$= 0.0036+0.0048 = 0.0084$

他も同様

この表より

$$p(a=1,b=1|d=1) = \frac{p(a=1,b=1,d=1)}{p(d=1)} = \frac{0.0084}{0.0856} = 0.0981..$$

$$\frac{p(a=1)p(b=1)p(d=1|a=1,b=1)}{p(d=1)} = \frac{p(a=1)p(b=1)\frac{p(a=1,b=1,d=1)}{p(a=1,b=1)}}{p(d=1)} = \frac{0.3\times 0.4\times\frac{0.0084}{0.12}}{0.0856} = \frac{0.0084}{0.0856}$$

$$p(a=1|d=1)p(b=1|d=1) = \frac{p(a=1,d=1)}{p(d=1)}\frac{p(b=1,d=1)}{p(d=1)} = \frac{0.0219}{0.0856}\frac{0.0322}{0.0856} = 0.0962..$$

なので

$$p(a=1,b=1|d=1) = \frac{p(a=1)p(b=1)p(d=1|a=1,b=1)}{p(d=1)} \neq p(a=1|d=1)p(b=1|d=1)$$

である。よって

$$p(a,b|d) = \frac{p(a)p(b)p(d|a,b)}{p(d)} \neq p(a|d)p(b|d)$$

である。

(確率表の作り方)

確率表は $p(a,b,c,d) = p(d|c)\,p(c|a,b)\,p(a)\,p(b)$ …①

の右辺の因子の値を適当に決めて作る。但し各因子の規格化条件は満たすようにする。

因子の値を

$p(a=1)=0.3$, $p(a=0)=1-0.3=0.7$

$p(b=1)=0.4$, $p(b=0)=1-0.4=0.6$

$p(c=1|a=1,b=1)=0.2$, $p(c=0|a=1,b=1)=1-0.2=0.8$

$p(c=1|a=1,b=0)=0.25$, $p(c=0|a=1,b=0)=1-0.25=0.75$

$p(c=1|a=0,b=1)=0.35$, $p(c=0|a=0,b=1)=1-0.35=0.65$

$p(c=1|a=0,b=0)=0.45$, $p(c=0|a=0,b=0)=1-0.45=0.55$

$p(d=1|c=1)=0.15$, $p(d=0|c=1)=1-0.15=0.85$

$p(d=1|c=0)=0.05$, $p(d=0|c=0)=1-0.05=0.95$

とすると、

a	b	c	d	$p(a,b,c,d)=p(a)p(b)p(c\mid a,b)p(d\mid c)$
1	1	1	1	$p(a=1)p(b=1)p(c=1\mid a=1,b=1)p(d=1\mid c=1)$ $=0.3\times0.4\times0.2\times0.15=0.0036$
1	1	1	0	$0.3\times0.4\times0.2\times0.85=0.0204$
1	1	0	1	$0.3\times0.4\times0.8\times0.05=0.0048$
1	1	0	0	$0.3\times0.4\times0.8\times0.95=0.0912$
1	0	1	1	$0.3\times0.6\times0.25\times0.15=0.00675$
1	0	1	0	$0.3\times0.6\times0.25\times0.85=0.03825$
1	0	0	1	$0.3\times0.6\times0.75\times0.05=0.00675$
1	0	0	0	$0.3\times0.6\times0.75\times0.95=0.12825$
0	1	1	1	$0.7\times0.4\times0.35\times0.15=0.0147$
0	1	1	0	$0.7\times0.4\times0.35\times0.85=0.0833$
0	1	0	1	$0.7\times0.4\times0.65\times0.05=0.0091$
0	1	0	0	$0.7\times0.4\times0.65\times0.95=0.1729$
0	0	1	1	$0.7\times0.6\times0.45\times0.15=0.02835$
0	0	1	0	$0.7\times0.6\times0.45\times0.85=0.16065$
0	0	0	1	$0.7\times0.6\times0.55\times0.05=0.01155$
0	0	0	0	$0.7\times0.6\times0.55\times0.95=0.21945$

という確率表を得る。

表の各$p(a,b,c,d)$の値は①で計算したので、出来上がった表は①の因数分解を満たしていることになる。

また $\sum_a\sum_b\sum_c\sum_d p(a,b,c,d)=\sum_b p(b)\left(\sum_a p(a)\left(\sum_c p(c\mid a,b)\left(\sum_d p(d\mid c)\right)\right)\right)=1$ なので

因子毎に規格化していれば、$p(a,b,c,d)$も規格化されていることになる。

また
$$
\begin{aligned}
q(a=1) &= p(a=1,b=1,c=1,d=1)+p(a=1,b=1,c=1,d=0)+\cdots \\
&= p(a=1)p(b=1)p(c=1\mid a=1,b=1)p(d=1\mid c=1)+p(a=1)p(b=1)p(c=1\mid a=1,b=1)p(d=0\mid c=1)+\cdots \\
&= p(a=1)\sum_b\sum_c\sum_d p(b)p(c\mid a,b)p(d\mid c) \\
&= p(a=1)\underbrace{\left(\sum_b p(b)\right)}_{1}\underbrace{\sum_c\left(p(c\mid a,b)\underbrace{\sum_d p(d\mid c)}_{1}\right)}_{1} = p(a=1)
\end{aligned}
$$

となり表から求めた$q(a=1)$は最初に与えた$p(a=1)$と等しくなる。他の因子についても同様。