

8.17



x_2 から x_5 への経路は1つだけで、この経路は x_3 で遮断されている。
 よって無向グラフの分離標準より

$$x_2 \perp\!\!\!\perp x_5 \mid x_3$$

である。

因数分解は

$$p(x) = p(x_1) p(x_2|x_1) p(x_3|x_2) p(x_4|x_3) p(x_5|x_4)$$

と分解。
 $\mu_{12}(x_1, x_2)$ $\mu_{23}(x_2, x_3)$ $\mu_{34}(x_3, x_4)$ $\mu_{45}(x_4, x_5)$

$$x_2 \perp\!\!\!\perp x_5 \mid x_3 \text{ かつ}$$

$$p(x_2, x_5 \mid x_3) = p(x_2 \mid x_3) p(x_5 \mid x_3)$$

$$= p(x_2 \mid x_5, x_3) p(x_5 \mid x_3) \leftarrow \text{乗法定理より}$$

よって

$$p(x_2 \mid x_5, x_3) = p(x_2 \mid x_3)$$

$$= \frac{p(x_2, x_3)}{p(x_3)}$$

$$= \frac{\mu_{\alpha}(x_2) p(x_3 \mid x_2) \mu_{\beta}(x_3)}{\mu_{\alpha}(x_1) \mu_{\beta}(x_1)}$$

$$= \frac{\mu_{\alpha}(x_2)}{\mu_{\alpha}(x_1)} p(x_3 \mid x_2)$$

この時点で x_5 に依存しないことは分かる。
 X-ツリーパッシングを使った式変形 ← (8.58)
 ← (8.54)
 $\mu_{\beta}(x_3)$ は x_5 に依存するが分母分子で約分して消える。

ここで

$\mu_{\alpha}(x_2)$, $\mu_{\alpha}(x_1)$ は x_1, x_2, x_3 にはのみ依存し、 $p(x_3 \mid x_2)$ は x_2, x_3 にはのみ依存するから
 結局 $p(x_2 \mid x_5, x_3)$ は X-ツリーパッシングを使った場合も x_5 に依存しない。