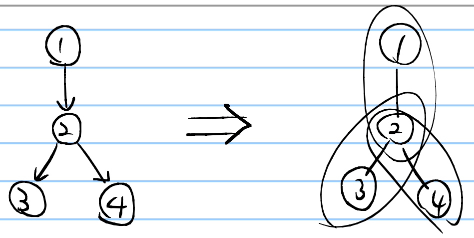


有向木のリンクの矢印を消して無向木を作る。リンクの両端のノードはクリークを作る。
有向木のリンクと無向木のクリークは一対一対応する。

有向木の因数分解は

$p(x) = p(x_1)\prod_{i=2}^{N} p(x_i|x_{pai})$, x_{pai}はx_iの親ノード …①

無向木の因数分解は、クリーク毎のポテンシャル関数の積なので

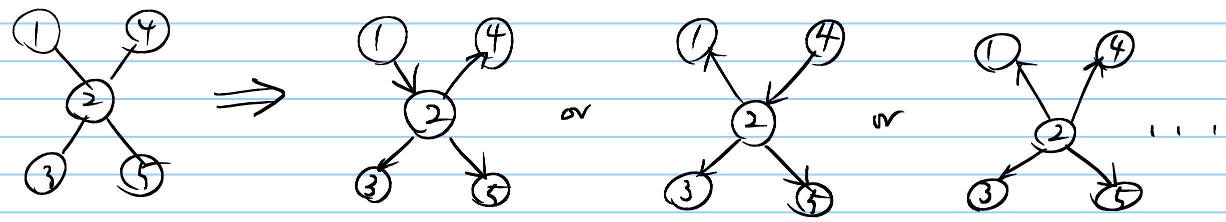
$p(x) = \prod_{i=1}^{N} \psi_{i,pai}(x_i, x_{pai})$, x_{pai}はx_iの親ノード …②

と書ける。
①と②を見比べて

$\psi_{2,1}(x_2, x_1) = p(x_1)p(x_2|x_1)$

$\psi_{i,pai}(x_i, x_{pai}) = p(x_i|x_{pai})$, $i \neq 1,2$

とすると有向木の因数分解と同じ値をとる無向木の因数分解を得ることができる。



無向木を有向木にする手順

① 適当にルートノードを決める

② ルートに接続するリンクのリンク先の方に矢印をつける。

③ 矢印をつけられた先のノードについてノードに接続するリンクのうち矢印のついていないリンクのリンク先の方に矢印をつける。

無向木のクリークは、有向木のリンクと一対一対応する

無向木の因数分解は

$p_1(x) = \frac{1}{Z}\prod_{C} \psi_C(x_C)$

となる。
有向木の因数分解は

$p_2(x) = p(x_1)\prod_{i=2}^{N} p(x_i|x_{pai})$, x_{pai}はx_iの親ノード, x_1はルートノード

無向木のクリークと有向木のリンクは一対一対応なので因子$p(x_i|x_{pai})$に対応する因子$\psi_C(x_C)$が存在する
そこで

$p(x_i|x_{pai}) = \frac{1}{Z_C}\psi_C(x_C)$, $Z_C = \int \psi_C(x_C)dx_C$

とし、

また $p(x_1)$ は連続一様分布、若しくは離散一様分布、または $(-\infty,\infty)$ 範囲なら σ^2 が ∞ のガウス分布とする

$$p(x_1) = U(a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{other} \end{cases}$$ ← 連続一様分布

こうなると

$$p_2(x) = U(a,b) \prod_c \frac{1}{Z_c} \psi_c(x_c) = U(a,b) \prod_c \frac{1}{Z_c} \prod_c \psi_c(x_c)$$

となる。ここで

$$U(a,b) \prod_c \frac{1}{Z_c} = \frac{1}{Z}$$

$$\therefore U(a,b) = \frac{1}{Z} \prod_c Z_c$$

となるように a, b を調整すると

$$p_2(x) = \frac{1}{Z} \prod_c \psi_c(x_c) = p_1(x)$$

となり無向木の因数分解と同じ値を取る有向木の因数分解を得ることができる。

なお、$p(x_1)$ をうまく設定できない場合は、無向木と等価な有向木を作ることができないということになる。

無向木から有向木を作る手順において

① のルートを決める手順はノードを選択する自由度がある。

②, ③ の手順できまるリンクの方向付けは一意である。

よって無向木から有向木への変換は N 通りある。