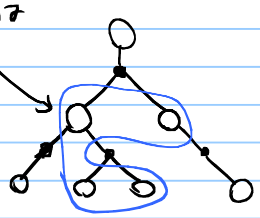
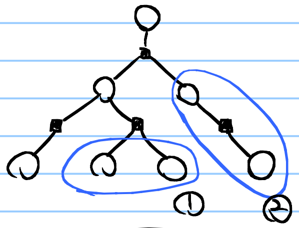
8.22

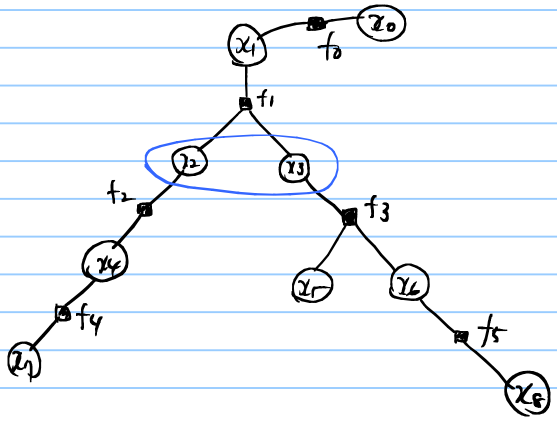
連結部分グラフというのは
こういう部分のことを指すと
思われる。



8.22の問題文の中の定ぎだと下のような部分集合も連結部分グラフになってしまう
→ 多分、問題文の定義が不十分と思われる



①∪②という部分集合



$$p(x_2, x_3) = \sum_{x_0}\sum_{x_1}\sum_{x_4}\sum_{x_5}\sum_{x_6}\sum_{x_7}\sum_{x_8} p(x_0, x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6\, x_7\, x_8)$$

$$= \sum_{x_0}\sum_{x_1}\sum_{x_4}\sum_{x_5}\sum_{x_6}\sum_{x_7}\sum_{x_8} f_0 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot f_5$$

$$= \left(\sum_{x_1}\left(f_1 \sum f_0\right)\right)\left(\sum_{x_4}\left(f_2 \sum_{x_7} f_4\right)\right)\left(\sum_{x_5}\sum_{x_6}\left(f_3 \sum_{x_8} f_5\right)\right)$$

$$= \sum_{x_1}\left(f_1 \mu_{x_1 \to f_1}\right) \mu_{f_2 \to x_2}\, \mu_{f_3 \to x_3}$$

これを一般化して
x_τ を連結部分グラフ内のノード点の集合とする
f_s を 〃 〃 をリンクする因子の集合とする
x_m を f_sの因子にリンクするが x_τに含まれないノードの集合とする
f_n を x_τのノードにリンクするが f_sに含まれない因子の集合とする

$$p(x_\tau) = \sum_{x_m} \prod_{f_s}\left(f_s\left(\prod_{\substack{x \in x_m \\ x \in ne(f_s)}} \mu_{x \to f_s}\right)\right) \prod_{f_n} \mu_{f_n \to x_n}, \quad x_n \in x_\tau$$

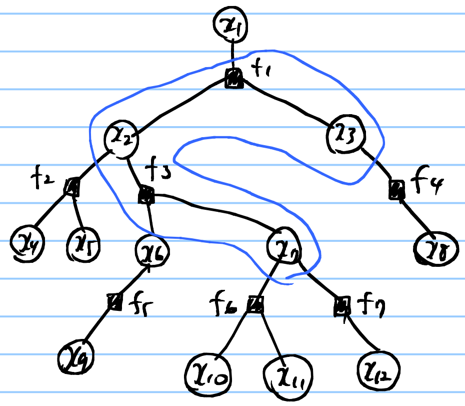
何かx

部分グラフの外から入ってくるメッセージの積

という感じになる。

証明は…

例



$$p(x_2, x_7, x_3) = \sum_{x_1}\sum_{x_6} f_1 \cdot f_3\, \mu_{x_1\to f_1}\, \mu_{x_6\to f_3}\, \mu_{f_2\to x_2}\, \mu_{f_6\to x_7}\, \mu_{f_7\to x_7}\, \mu_{f_4\to x_3}$$

$$= \sum_{x_1}\sum_{x_6} f_1 \cdot f_3 \cdot 1 \cdot \sum_{x_9} f_5 \sum_{x_4}\sum_{x_5} f_2 \sum_{x_{10}}\sum_{x_{11}} f_6 \sum_{x_{12}} f_7 \sum_{x_8} f_4$$

$$= \sum_{x_1}\sum_{x_4}\sum_{x_5}\sum_{x_6}\sum_{x_8}\sum_{x_9}\sum_{x_{10}}\sum_{x_{11}}\sum_{x_{12}} f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 f_7$$ ← 周辺分布になっている。