8.4

$$p(a)=\sum_{b=0,1}\sum_{c=0,1}p(a,b,c)=\sum_{b=0,1}\{p(a,b,c=0)+p(a,b,c=1)\}$$
$$=p(a,b=0,c=0)+p(a,b=1,c=0)+p(a,b=0,c=1)+p(a,b=1,c=1)$$
$$=\frac{192}{1000}+\frac{48}{1000}+\frac{64}{1000}+\frac{96}{1000}=\frac{400}{1000}$$

$$p(c)=\sum_{a=0,1}\sum_{b=0,1}p(a,b,c)=p(0,0,1)+p(0,1,1)+p(1,0,1)+p(1,1,1)$$
$$=\frac{144}{1000}+\frac{216}{1000}+\frac{64}{1000}+\frac{96}{1000}=\frac{520}{1000}$$

$$p(b,c)=\sum_{a=0,1}p(a,b,c)=p(0,1,1)+p(1,1,1)$$
$$=\frac{216}{1000}+\frac{96}{1000}=\frac{312}{1000}$$

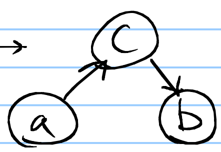
$$p(b|c)=\frac{p(b,c)}{p(c)}=\frac{1000}{520}\frac{312}{1000}=\frac{312}{520}$$

$$p(c,a)=\sum_{b=0,1}p(a,b,c)=p(1,0,1)+p(1,1,1)$$
$$=\frac{64}{1000}+\frac{96}{1000}=\frac{160}{1000}$$

$$p(c|a)=\frac{p(c,a)}{p(a)}=\frac{1000}{400}\frac{160}{1000}=\frac{160}{400}$$

$$p(a,b,c)=p(a)p(c|a)p(b|c)=\frac{400}{1000}\frac{160}{400}\frac{312}{520}=\frac{96}{1000}$$ ← 表の $a=1,b=1,c=1$ の確率に整合している

この式を図にしたもの →



($p(a,b,c)=p(a)p(c|a)p(b|c)$ の導出)

問8.3より表の確率変数は $p(a,b|c)=p(a|c)p(b|c)$ であることがわかっているので

乗法定理より

$$p(a,b|c)=p(b|a,c)p(a|c)$$

なので

$$p(b|a,c)=p(b|c)$$

である。

これを使って 乗法定理

$$p(a,b,c)=p(b|a,c)p(c|a)p(a)$$
$$=p(b|c)p(c|a)p(a)$$

を得る。

他にも

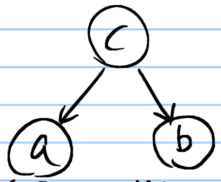
$p(a,b|c) = p(a|c)p(b|c)$

という同じ条件付独立の下で

$p(a,b,c) = p(a,b|c)p(c) = p(a|c)p(b|c)p(c)$

乗法定理

図にすると



という因数分解も可能である。

つまり条件付独立を満たす因数分解は複数あることもある。