

$a \perp\!\!\!\perp b, c \mid d \Rightarrow a \perp\!\!\!\perp b \mid d$ の証明

$a \perp\!\!\!\perp b, c \mid d \text{ F1}$

$$p(a, b, c \mid d) = p(a \mid d) p(b, c \mid d) \dots \textcircled{1}$$

ここで

$$p(a, b, d) = \sum_c p(a, b, c, d) = \sum_c p(a, b, c \mid d) p(d) \dots \textcircled{2}$$

↑ 加法定理
↑ 乗法定理

7"を3。

$$\textcircled{2} \text{ の右辺} = p(a, b \mid d) p(d)$$

↑ 乗法定理

$$\textcircled{2} \text{ の右辺} = \sum_c p(a \mid d) p(b, c \mid d) p(d) \leftarrow \textcircled{1} \text{ F1}$$

$$= \sum_c p(a \mid d) p(c \mid b, d) p(b \mid d) p(d)$$

$$= p(a \mid d) p(b \mid d) p(d) \underbrace{\sum_c p(c \mid b, d)}_1$$

$$= p(a \mid d) p(b \mid d) p(d)$$

よって

$$p(a, b \mid d) = p(a \mid d) p(b \mid d)$$

を得る。これは F1

$$a \perp\!\!\!\perp b \mid d$$

を得る。