

① 収束するとは言っていない

結果が大域的な最小値であることは求められていない

→ Eステップで別の r_{nk} に切り替える

K-means アルゴリズムの反復において収束せずに同じ r_{nk} 状態が 2 回選ばれたと仮定すると

1 回目の r_{nk} が選ばれたときを J_1 とする

M ステップを実行し $\{M_{kj}\}$ を最適化する

次に E ステップを実行し新しい r_{nk}' を選ぶ このときの J を J_2 とする

さらに EM ステップを繰り返す

2 回目の r_{nk} が選ばれたときを J_2 とする

M ステップを実行し $\{M_{kj}\}$ を最適化する

次に E ステップを実行し、新しい r_{nk}' を選ぶ このときの J を J_2 とする

収束していない場合、EM ステップで J は小さくなるから $J_2 < J_1$ である。

一方、同じ r_{nk} の下での最適化は $\{M_{kj}\}_1 = \{M_{kj}\}_2$ である。

なぜなら、同じ r_{nk} 、同じ $\{M_{kj}\}$ の下での E ステップと $r_{nk}' = r_{nk}$ となる。

つまり、同じ r_{nk} 、同じ $\{M_{kj}\}$ の下での J となるから $J_1 = J_2$ となる。

これは、 $J_2 < J_1$ と矛盾する。

なぜなら K-means アルゴリズムにおいて収束せずに同じ r_{nk} 状態が 2 回選ばれたことはない。

r_{nk} の状態は有限個しかないから、K-means アルゴリズムは有限回で収束する。