9.12

ノートのタイトル 2016/04/23

(9.82) $p(x) = \sum_{k=1}^{K} \pi_k p(x|k)$

$p(x|k)$ について

$E_{x|k}[x] = \mu_k \quad \cdots ①$

$\mathrm{cov}_{x|k}[x] = \Sigma_k \quad \cdots ②$

とする。このとき

$p(x)$ について 平均は

(9.82)　　x は k によらないので $\sum_k$ の中に入れてよい

$$E_x[x] = \sum_x x\, p(x) = \sum_x x \left\{ \sum_{k=1}^{K} \pi_k p(x|k) \right\} = \sum_x \sum_k x\, \pi_k p(x|k)$$

$$= \sum_k \pi_k \sum_x x\, p(x|k) = \sum_k \pi_k E_{x|k}[x] = \sum_k \pi_k \mu_k$$

総和の順番は交換してよい　　①

となり (9.49) を得る

$p(x)$ について共分散

$$\mathrm{cov}_x[x] \overset{(2.63)}{=} E_x\left[(x - E_x[x])(x - E_x[x])^T\right] = E_x\left[xx^T - xE_x[x]^T - E_x[x]x^T + E_x[x]E_x[x]^T\right]$$

$$= E_x[xx^T] - E_x[x]E_x[x]^T$$

$E_x[xE_x[x]^T]_{ij} = E_x[x_i E_x[x]_j] = E_x[x_i] E_x[x]_j = (E_x[x] E_x[x]^T)_{ij}$
なので
$E_x[x E_x[x]^T] = E_x[x] E_x[x]^T$
同様に
$E_x[x^T E_x[x]] = E_x[x] E_x[x]^T$

ここで

$$E_x[xx^T] = \sum_x xx^T p(x)$$

$$= \sum_x xx^T \sum_{k=1}^{K} \pi_k p(x|k)$$

$$= \sum_k \pi_k \sum_x xx^T p(x|k)$$

$$= \sum_k \pi_k E_{x|k}[xx^T]$$

$$= \sum_k \pi_k (\Sigma_k + \mu_k \mu_k^T)$$

②　　(2.63) 共分散の定義

$$\Sigma_k = \mathrm{cov}_{x|k}[x] = E_{x|k}\left[(x - E_{x|k}[x])(x - E_{x|k}[x])^T\right]$$

$$= E_{x|k}[xx^T] - E_{x|k}[x] E_{x|k}[x]^T$$

$$= E_{x|k}[xx^T] - \mu_k \mu_k^T \leftarrow ①$$

なので

$$\mathrm{cov}_x[x] = \sum_k \pi_k (\Sigma_k + \mu_k \mu_k^T) - E_x[x] E_x[x]^T$$

となり (9.50) を得る。