9.15

ノートのタイトル 2016/04/25

(9.55) $E_Z[\ln p(X,Z)] = \sum_n \sum_j \gamma(z_{nj}) \left\{ \ln \pi_j + \sum_i \left[x_{ni} \ln \mu_{ji} + (1-x_{ni}) \ln(1-\mu_{ji}) \right] \right\}$

これより　← $\sum_j$ の和のうち μ_k を含んでいるのは $j=k$ の項だけなので

$$\frac{\partial E_Z}{\partial \mu_{kl}} = \sum_n \frac{\partial}{\partial \mu_{kl}} \gamma(z_{nk}) \left\{ \ln \pi_k + \sum_i \left[x_{ni} \ln \mu_{ki} + (1-x_{ni}) \ln(1-\mu_{ki}) \right] \right\}$$

$$= \sum_n \gamma(z_{nk}) \frac{\partial}{\partial \mu_{kl}} \sum_i \left[x_{ni} \ln \mu_{ki} + (1-x_{ni}) \ln(1-\mu_{ki}) \right]$$

$$= \sum_n \gamma(z_{nk}) \frac{\partial}{\partial \mu_{kl}} \left[x_{nl} \ln \mu_{kl} + (1-x_{nl}) \ln(1-\mu_{kl}) \right]$$ ← $\sum_i$ の和のうち μ_{kl} を含んでいるのは $i=l$ の項だけなので

$$= \sum_n \gamma(z_{nk}) \left[x_{nl} \frac{1}{\mu_{kl}} + (1-x_{nl}) \frac{-1}{1-\mu_{kl}} \right]$$

を得る。これを0とおいて μ_{kl} について解く

$$\sum_n \gamma(z_{nk}) \left[x_{nl} \frac{1}{\mu_{kl}} + (1-x_{nl}) \frac{-1}{1-\mu_{kl}} \right] = 0$$

$$\therefore \frac{1}{\mu_{kl}} \sum_n \gamma(z_{nk}) x_{nl} - \frac{1}{1-\mu_{kl}} \sum_n \gamma(z_{nk})(1-x_{nl}) = 0$$

$$\therefore \frac{1}{\mu_{kl}} N_k \bar{x}_{kl} - \frac{1}{1-\mu_{kl}} (N_k - N_k \bar{x}_{kl}) = 0$$ ← $\sum_n \gamma(z_{nk}) x_{nl} \overset{(9.58)}{=} N_k \bar{x}_{kl}$, $\sum_n \gamma(z_{nk}) \overset{(9.57)}{=} N_k$ より

両辺に $\mu_{kl}(1-\mu_{kl})$ を掛けると

$$N_k \bar{x}_{kl} - \mu_{kl} N_k \bar{x}_{kl} - N_k \mu_{kl} + \mu_{kl} N_k \bar{x}_{kl} = 0$$

$$\therefore \mu_{kl} = \bar{x}_{kl}$$

を得る。μ_{kl} は μ_k の成分なので、ベクトル表示すると

$$\mu_k = \bar{x}_k \quad \cdots (9.59)$$

を得る。