9.16

ノートのタイトル 2016/04/25

(9.55) $E_Z[\ln p(X,Z)] = \sum_n \sum_j \gamma(z_{nj}) \left\{ \ln \pi_j + \sum_i \left[x_{ni} \ln \mu_{ji} + (1-x_{ni}) \ln(1-\mu_{ji}) \right] \right\}$

またπ_kについて

$\sum_j \pi_j = 1$

なので、ラグランジアンは

$$L = \sum_n \sum_j \gamma(z_{nj}) \left\{ \ln \pi_j + \sum_i \left[x_{ni} \ln \mu_{ji} + (1-x_{ni}) \ln(1-\mu_{ji}) \right] \right\} + \lambda \left(\sum_j \pi_j - 1 \right)$$

となる。

Lをπ_kで微分して0とおく

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_k} = \sum_n \frac{\partial}{\partial \pi_k} \gamma(z_{nk}) \left\{ \ln \pi_k + \sum_i \left[x_{ni} \ln \mu_{ji} + (1-x_{ni}) \ln(1-\mu_{ji}) \right] \right\} + \lambda \frac{\partial \pi_k}{\partial \pi_k}$$ ← $\sum_j$の和のうちπ_kを含むのは$j=k$の項だけなので

$$= \sum_n \gamma(z_{nk}) \frac{1}{\pi_k} + \lambda = 0$$

π_kをかけて$\sum_k$をとると

$$\sum_k \sum_n \gamma(z_{nk}) + \lambda \underbrace{\sum_k \pi_k}_{1} = 0$$

$$\sum_n \sum_k \gamma(z_{nk}) = \sum_n \sum_k \frac{\pi_k p(x_n|\mu_k)}{\sum_j \pi_j p(x_n|\mu_j)} \quad \leftarrow (9.56)$$

$$= \sum_n \frac{\sum_k \pi_k p(x_n|\mu_j)}{\sum_j \pi_j p(x_n|\mu_j)}$$ ← 分母はkに依らないので$\sum_k$の外に出して良い

$$= \sum_n 1 = N$$

$$\therefore N + \lambda = 0$$

$$\therefore \lambda = -N$$

を得る。これを元の式に戻して

$$\frac{1}{\pi_k} \sum_n \gamma(z_{nk}) - N = 0$$

$$\therefore \pi_k = \frac{N_k}{N} \quad \cdots (9.60)$$ ← $\overset{(9.57)}{\sum_n \gamma(z_{nk}) = N_k}$

を得る。