

$$(9.70) \ln p(X|\theta) = \mathcal{L}(\theta) + KL(q||p)$$

$$(9.71) \mathcal{L}(\theta) = \sum_{\mathbf{z}} q(\mathbf{z}) \ln \left\{ \frac{p(\mathbf{x}, \mathbf{z}|\theta)}{q(\mathbf{z})} \right\}$$

$$(9.72) KL(q||p) = - \sum_{\mathbf{z}} q(\mathbf{z}) \ln \left\{ \frac{p(\mathbf{z}|\mathbf{x}, \theta)}{q(\mathbf{z})} \right\}$$

(9.71), (9.72) へ'

$$\mathcal{L}(\theta) + KL(q||p) = \sum_{\mathbf{z}} q(\mathbf{z}) \ln \left\{ \frac{p(\mathbf{x}, \mathbf{z}|\theta)}{q(\mathbf{z})} \right\} - \sum_{\mathbf{z}} q(\mathbf{z}) \ln \left\{ \frac{p(\mathbf{z}|\mathbf{x}, \theta)}{q(\mathbf{z})} \right\}$$

$$= \sum_{\mathbf{z}} q(\mathbf{z}) \left[ \ln \left\{ \frac{p(\mathbf{x}, \mathbf{z}|\theta)}{q(\mathbf{z})} \right\} - \ln \left\{ \frac{p(\mathbf{z}|\mathbf{x}, \theta)}{q(\mathbf{z})} \right\} \right]$$

$$= \sum_{\mathbf{z}} q(\mathbf{z}) \ln \left\{ \frac{p(\mathbf{x}, \mathbf{z}|\theta)}{q(\mathbf{z})} \frac{q(\mathbf{z})}{p(\mathbf{z}|\mathbf{x}, \theta)} \right\}$$

$$= \sum_{\mathbf{z}} q(\mathbf{z}) \ln \left\{ \frac{p(\mathbf{x}, \mathbf{z}|\theta)}{p(\mathbf{z}|\mathbf{x}, \theta)} \right\}$$

$$= \sum_{\mathbf{z}} q(\mathbf{z}) \ln \left\{ \frac{p(\mathbf{z}|\mathbf{x}, \theta) p(\mathbf{x}|\theta)}{p(\mathbf{z}|\mathbf{x}, \theta)} \right\}$$

$$= \sum_{\mathbf{z}} q(\mathbf{z}) \ln p(\mathbf{x}|\theta)$$

$$= \ln p(\mathbf{x}|\theta) \leftarrow p(\mathbf{x}|\theta) \text{ は } \mathbf{z} \text{ に依らず } \sum_{\mathbf{z}} q(\mathbf{z}) \ln p(\mathbf{x}|\theta) \text{ となり } \sum_{\mathbf{z}} q(\mathbf{z}) = 1 \text{ となる}$$

とて (9.70) を得る。