9.8

(9.40) $E[\ln p(X,Z)] = \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{K} \gamma(z_{nj})\{\ln \pi_j + \ln N(x_n|\mu_j, \Sigma_j)\}$

極大点を与えるμ_kの満たすべき式は

$$\frac{\partial E}{\partial \mu_k} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{K}\gamma(z_{nj})\frac{\partial}{\partial \mu_k}\ln N(x_n|\mu_j, \Sigma_j) = 0$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{N}\gamma(z_{nk})\frac{\partial}{\partial \mu_k}\ln N(x_n|\mu_k, \Sigma_k) = 0$$

となる。ここで

$$\frac{\partial N}{\partial \mu_k} = \frac{\partial}{\partial \mu_k}\frac{1}{(2\pi)^{D/2}}\frac{1}{|\Sigma_k|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_n-\mu_k)^T\Sigma_k^{-1}(x_n-\mu_k)\right\}$$
$$= N(x_n|\mu_k \Sigma_k)\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2\Sigma_k^{-1}(x_n-\mu_k)(-1)$$
$$= N(x_n|\mu_k \Sigma_k)\Sigma_k^{-1}(x_n-\mu_k)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}x^TAx = (A+A^T)x$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu_k}\ln N(x_n|\mu_k \Sigma_k) = \frac{\frac{\partial}{\partial \mu_k}N(x_n|\mu_k \Sigma_k)}{N(x_n|\mu_k \Sigma_k)} = \Sigma_k^{-1}(x_n-\mu_k)$$

なので、μ_kの式は

$$\sum_{n=1}^{N}\gamma(z_{nk})\Sigma_k^{-1}(x_n-\mu_k) = 0$$

となる。

これより

$$\sum_{n=1}^{N}\gamma(z_{nk})(x_n-\mu_k) = 0$$ ← 両辺に左からΣ_kをかける。$\gamma(z_{nk})$はスカラーである。

$$\sum_{n=1}^{N}\gamma(z_{nk})x_n - \mu_k\sum_{n=1}^{N}\gamma(z_{nk}) = 0$$

$$\therefore \mu_k = \frac{\sum_{n=1}^{N}\gamma(z_{nk})x_n}{\sum_{n=1}^{N}\gamma(z_{nk})} = \frac{1}{N_k}\sum_{n=1}^{N}\gamma(z_{nk})x_n, \quad N_k = \sum_{n=1}^{N}\gamma(z_{nk}) \quad \cdots (9.17), (9.18)$$

を得る。