演習5.12

ノートのタイトル　2014/03/20

(問題) $\nabla E(w^*)=0$ のとき、H が正定値 $\Leftrightarrow$ w^* で極小

w^* 近傍での E の Taylor 展開

$$E(w) = E(w^*) + \frac{1}{2}(w-w^*)^T H (w-w^*) \quad \cdots (5.32)$$

① H が正定値ならば

(5.32) より

$$E(w) - E(w^*) = \frac{1}{2}(w-w^*)^T H (w-w^*) > 0$$

$$\therefore E(w) > E(w^*)$$

なので w^* で E は極小になる。

② 一方 ある w_1 で

$$(w_1-w^*)^T H (w_1-w^*) < 0$$

ならば、(5.32) より

$$E(w_1) - E(w^*) = \frac{1}{2}(w_1-w^*)^T H (w_1-w^*) < 0$$

なので w^* で E は極小でない

③ また ある w_2 で

$$(w_2-w^*)^T H (w_2-w^*) = 0$$

ならば、(5.32) より

$$E(w_2) - E(w^*) = \frac{1}{2}(w_2-w^*)^T H (w_2-w^*) = 0$$

なので w^* で E は極小でない

①, ②, ③ より

④ w^* で E が極小ならば H は正定値である。

①, ④ より

$\nabla E(w^*)=0$ のとき H が正定値 $\Leftrightarrow$ w^* で E が極小