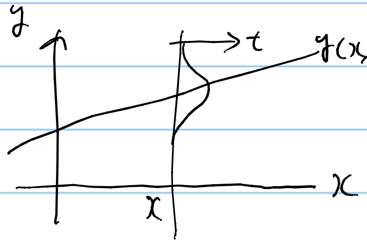
演習5.17

$$E=\frac{1}{2}\iint\{y(x,w)-t\}^2 p(x,t)\,dx\,dt$$

xが連続値なので xで積分している



積分と微分の順序交換し.

$$\frac{\partial E}{\partial w_s}=\frac{1}{2}\iint\frac{\partial}{\partial w_s}\{(y-t)^2p(x,t)\}\,dx\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\iint\frac{\partial y}{\partial w_s}\frac{\partial}{\partial y}\{(y-t)^2p(x,t)\}\,dx\,dt$$

$$=\iint\frac{\partial y}{\partial w_s}(y-t)\,p(x,t)\,dx\,dt$$

積分と微分の順序交換と微分のチェーンルールより

$$\frac{\partial E}{\partial w_r\partial w_s}=\iint\frac{\partial y}{\partial w_r}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial y}{\partial w_s}(y-t)\,p(x,t)\right\}dx\,dt$$

$$=\iint\frac{\partial y}{\partial w_r}\frac{\partial y}{\partial w_s}p(x,t)\,dx\,dt$$

$$=\int\frac{\partial y}{\partial w_r}\frac{\partial y}{\partial w_s}\underbrace{\int p(x,t)\,dt}_{p(x,t)\text{のx軸への周辺確率}}\,dx$$

$$=\int\frac{\partial y}{\partial w_r}\frac{\partial y}{\partial w_s}\,p(x)\,dx$$

右辺は $\frac{\partial y}{\partial w_r}\frac{\partial y}{\partial w_s}$ の期待値である。
観測値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が与えられたときのこの期待値の推定値は

$$\frac{\partial E}{\partial w_r\partial w_s}=\frac{1}{N}\sum_n\frac{\partial y_n}{\partial w_r}\frac{\partial y_n}{\partial w_s}$$

…平均値を推定値として選んだ場合

を得る。
これを用いると

$$H=\nabla\nabla E=\begin{pmatrix}\partial_w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_w\end{pmatrix}E=\begin{pmatrix}\partial_{w_1}\partial_{w_1} & \partial_{w_1}\partial_{w_2}\\ \partial_{w_2}\partial_{w_1} & \partial_{w_2}\partial_{w_2}\end{pmatrix}E$$

$$=\frac{1}{N}\sum_n\begin{pmatrix}\partial_{w_1}y_n\,\partial_{w_1}y_n & \partial_{w_1}y_n\,\partial_{w_2}y_n\\ \partial_{w_2}y_n\,\partial_{w_1}y_n & \partial_{w_2}y_n\,\partial_{w_2}y_n\end{pmatrix}=\frac{1}{N}\sum_n\nabla y_n(\nabla y_n)^T=\frac{1}{N}\sum_n b_n b_n^T$$

を得る。
(5.84)に比べて $\frac{1}{N}$ になっているが、いいのか?

注 $\frac{\partial y}{\partial x}\neq\frac{dy}{dx}$

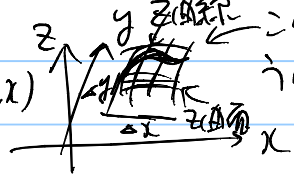
また同じ $\frac{\partial y}{\partial x}$ という表記でも何を定数扱いしてるかで中身が異なる
→定数扱いする変数を一貫させること

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y}=0$$

交換則

一貫させておけば途中式の偏微分がどんな形でも最終で得られるものは同じ形になる.

$z=z(y(x),x)$



こんな図を思いうかべて何の変化を見るか認識すること

$\frac{\partial z}{\partial y}$ は z曲面上でのΔyに対するzの変化分

$\frac{dz}{dx}$ は z曲面上のz曲線におけるΔxに対するzの変化分

$\frac{\partial z}{\partial x}$ は z曲面上でのΔxに対するzの変化分