演習5.2

(問題) 各観測値(x_i,t_i)の入力x_iに対する出力t_iの条件付確率を(5.16)とする。
このとき 全観測値の尤度関数の最大化=(5.11)の最小化であることを示す

$$p(t|x,w)=N(t|y(x,w),\beta^{-1}I) \quad (5.16)$$

$$E(w)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\|y(x_n,w)-t_n\|^2 \quad (5.11)$$

全観測値 $(x_1,t_1),(x_2,t_2)\cdots$ に対する尤度関数は

$p=$尤度関数$=((x_1,t_1),(x_2,t_2),\cdots)$の同時確率

$$=\prod_{n=1}^{N}N(t_n|y(x_n,w),\beta^{-1}I)$$ ← 各観測値は独立なのでかけ算でよい

$$=\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{K}\exp\left\{-\frac{\beta}{2}\|t_n-y_n\|^2\right\}$$

多次元ガウス分布　Dはxの次数

$$(2.43)\quad N(x|\mu,\Sigma)=\frac{1}{(2\pi)^{D/2}}\frac{1}{|\Sigma|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right\}$$

これより

$$N(t_n|y_n,\beta^{-1}I)=\frac{1}{(2\pi)^{K/2}}\frac{1}{(\beta^{-K})^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(t_n-y_n)^T\beta I(t_n-y_n)\right\}$$

$$=\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{\frac{K}{2}}\exp\left\{-\frac{\beta}{2}(t_n-y_n)^T(t_n-y_n)\right\}$$

$$=\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{\frac{K}{2}}\exp\left\{-\frac{\beta}{2}\|t_n-y_n\|^2\right\}$$

↑
Kはt_n,y_nの次数=観測値の数

pの最大化 $=-\ln p$ の最小化である

$$-\ln p=-N\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{\frac{K}{2}}+\beta\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}\|t_n-y_n\|^2$$

なので

$-\ln p$の最小化 $=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}\|t_n-y_n\|^2$ の最小化

$=(5.11)$の最小化

よって p の最大化 $=(5.11)$の最小化
と言える。

wの分布(5.16)として尤度関数の最大化

||

(5.11)の最小化.

$$p(t|x,w)=\mathcal{N}(t|y(x,w),\beta^{-1})=\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^{-1}}}\exp\left\{-\frac{1}{2\beta^{-1}}(t-y)^2\right\}$$

$y_n=y(x_n,w)$

$$p(t|X,w,\beta)=\prod_{n=1}^{N}p(t_n|x_n,w,\beta)=\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^{-1}}}\exp\left\{-\frac{1}{2\beta^{-1}}(t_n-y_n)^2\right\}$$

$$X=(\underbrace{x_1\ x_2\cdots}_{N個})$$

負の対数をとる

$$-\sum_{n=1}^{N}\left\{-\frac{1}{2}(\ln 2\pi+\ln\beta^{-1})+\frac{-1}{2\beta^{-1}}(t_n-y_n)^2\right\}=\frac{N}{2}\ln(2\pi)-\frac{N}{2}\ln\beta+\frac{\beta}{2}(t_n-y_n)^2$$