演習 5.21

問題) (5.86) $H_N = \sum b_n b_n^T$ を多出力に拡張する

(5.87) $H_{L+1} = H_L + b_{L+1} b_{L+1}^T$ も多出力に

(5.88) $(M + vv^T)^{-1} = M^{-1} - \dfrac{(M^{-1}v)(v^T M^{-1})}{1 + v^T M^{-1} v}$ 恒等式

(5.89) $H_{L+1}^{-1} = H_L^{-1} - \dfrac{H_L^{-1} b_{L+1} b_{L+1}^T H_L^{-1}}{1 + b_{L+1}^T H_L^{-1} b_{L+1}}$ … 多出力用に拡張する

演習5.16より
多出力の H_N は

$$H_N = \sum_n B_n B_n^T, \quad B_n = \nabla y_n, \quad y_n = \overbrace{(y_{n1}\ y_{n2}\ \cdots)}^{\text{多出力}}$$

これより
$$H_{L+1} = H_L + B_{L+1} B_{L+1}^T$$
を得る。
ここで
$$B_n = \nabla y_n = \begin{pmatrix} \partial w_1 \\ \partial w_2 \end{pmatrix} (y_{n1}\ y_{n2}) = (\nabla y_{n1}\ \nabla y_{n2})$$

$$B_n B_n^T = (\nabla y_{n1}\ \nabla y_{n2}) \begin{pmatrix} \nabla y_{n1}^T \\ \nabla y_{n2}^T \end{pmatrix} = \nabla y_{n1} \nabla y_{n1}^T + \nabla y_{n2} \nabla y_{n2}^T$$
$$= \sum_i^K b_{ni} b_{ni}^T$$
なので
$$H_{L+1} = H_L + \sum_i^K b_{L+1\,i}\, b_{L+1\,i}^T$$
となる。
これより
$$H_{L+1}^{-1} = \Big(\underbrace{H_L + \sum_i^K b_{L+1\,i}\, b_{L+1\,i}^T}_{A_K \text{とおく}}\Big)^{-1}$$

$$A_0^{-1} = H_L^{-1}$$

$$A_k^{-1} = \left(A_{k-1} + b_{L+1\,k} b_{L+1\,k}^{T}\right)^{-1}$$

$$= A_{k-1}^{-1} - \frac{(A_{k-1}^{T} b_{L+1\,k})(b_{L+1\,k} A_{k-1}^{T})}{1 + b_{L+1\,k}^{T} A_{k-1}^{-1} b_{L+1\,k}}$$

を得る。