5.29

ノートのタイトル 2015/01/02

(問) 

$$\frac{\partial \widetilde{E}}{\partial w_i} = \frac{\partial E}{\partial w_i} + \lambda \sum_j \gamma_j(w_i) \frac{(w_i - \mu_j)}{\sigma_j^2} \quad \cdots (5.141)$$ を求める。

$$\widetilde{E}(w) = E(w) + \lambda \Omega(w) \quad \cdots (5.139)$$

を w_i で微分する

$$\frac{\partial \widetilde{E}}{\partial w_i} = \frac{\partial E}{\partial w_i} + \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial w_i}$$

$$N(x|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}2(x-\mu)\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}$$

$$= -\frac{(x-\mu)}{\sigma^2} N(x|\mu,\sigma^2)$$

ここで

$$\Omega = -\sum_i \ln\left(\sum_{j=1}^{M} \pi_j N(w_i|\mu_j,\sigma_j^2)\right) \quad \cdots (5.138)$$

なので

$$\frac{\partial \Omega}{\partial w_i} = -\frac{\sum_{j=1}^{M} \pi_j \frac{-(w_i-\mu_j)}{\sigma_j^2} N(w_i|\mu_j,\sigma_j^2)}{\sum_{j=1}^{M} \pi_j N(w_i|\mu_j,\sigma_j^2)}$$

$$= \frac{\sum_j \pi_j N(w_i|\mu_j,\sigma_j^2) \frac{w_i-\mu_j}{\sigma_j^2}}{\sum_k \pi_k N(w_i|\mu_k,\sigma_k^2)}$$

ここで

$$\gamma_j(w) = \frac{\pi_j N(w|\mu_j,\sigma_j^2)}{\sum_k \pi_k N(w|\mu_k,\sigma_k^2)} \quad \cdots (5.140)$$

なので

$$\frac{\partial \Omega}{\partial w_i} = \sum_j \gamma_j(w_i) \frac{w_i-\mu_j}{\sigma_j^2}$$

となる。これより

$$\frac{\partial \widetilde{E}}{\partial w_i} = \frac{\partial E}{\partial w_i} + \lambda \sum_j \gamma_j(w_i) \frac{w_i-\mu_j}{\sigma_j^2} \quad \cdots (5.141)$$

を得る。